

Линейное пространство над произвольным полем.

§ 44.1

$$\alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y, \alpha, \beta \in P, x, y - \text{векторы из } V \Leftrightarrow (\alpha = \beta) \vee (x = y)$$

$$(\Rightarrow) \quad x(\alpha - \beta) = y(\alpha - \beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ x = y \end{cases}$$

($\Leftarrow$)

$$a) \alpha = \beta : \begin{matrix} \alpha(x+y) = \alpha(x+y) \\ \alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y \end{matrix}$$

$$b) x = y : \begin{matrix} \alpha x + \beta x = \beta x + \alpha x - \text{аксиома} \\ \alpha x + \beta y = \beta x + \alpha y \end{matrix}$$

З.г.

§ 44.4

a) Операции умножения:

$$\alpha, (a, b) \rightarrow (2\alpha a, 2\alpha b)$$

$$R \times R^2 \rightarrow R^2$$

Аксиомы ($\forall a, b, c \in V$)

- 1) $a + b = b + a$
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$
- 3) $\exists \theta \in V : a + \theta = \theta + a = a$
- 4) $\exists -a : a + (-a) = \theta$
- 5) $1 \cdot a = a$
- 6) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
- 7) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
- 8) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

§ 44.18(б)

Пусть $a = (1, i, 2-i, 3+i)$
 $b = (1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i)$

Тогда $a = \alpha b$, где $\alpha = 1-i \Rightarrow$ коллинеарны.

§ 44.20(a)

$$\begin{cases} \alpha i - \beta i + \gamma = 0 \\ \cancel{-\alpha - \beta + \gamma = 0} \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \cancel{+\alpha i + \beta i - \gamma = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \alpha + \beta \\ \alpha i - \beta i = -\alpha - \beta, \text{ в } \alpha(i+1) = \beta(i-1), \alpha = i\beta \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow$ где колл. : да
 где не колл. : нет

§ 44.40

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -15 & 12 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ранг } 2; \text{ база } \{x_1, x_2\}$$

§ 44.42

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ранг: 3
 база: $\{p_4, p_3, p_2\}$

§ 44.46

7.к. $x_i = \sum_{j=1}^r \alpha_j x_j$ и $x_i \neq 0 \Rightarrow \exists$ хотя бы один $\alpha_j \neq 0 \Rightarrow$ заменим x_i на x_j среди $x_1, \dots, x_r$. Также будет базой ТРВ sup . x_i не единственности.

§ 44.48

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 12 & 8 \\ -6 & 12 & 9 & -3 \\ -10 & 5 & -30 & -20 \\ -4 & 28 & 21 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \\ +2 & -1 & +6 & +4 \\ -2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{базис: } \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}$$

§ 44.3

$a+b = b+a ?$

4.б. $0 \cdot v = \theta \quad \forall v \in V; \quad 0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \Rightarrow 0 \cdot v = \theta.$

5.б. $(-1) \cdot v = -v \quad \forall v \in V; \quad \theta = 0 \cdot v = (1+(-1)) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = v + (-1)v \Rightarrow$

$\Rightarrow (-1) \cdot v = -v.$

$a+b - (b+a) = a+b + (-1)(b+a) = 1(a+b - b-a) = a+(b-b)-a = a-a = \theta.$

§ 44.9

1) $xy = yx \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+$

2) $(xy)z = x(yz)$

3) $\exists 1 \in \mathbb{R}_+ : \forall a \in \mathbb{R}_+ \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

4) $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \exists \underset{a^{-1}}{-a} \in \mathbb{R}_+ : a \cdot \underset{a^{-1}}{-a} = \underset{a^{-1}}{-a} \cdot a = a^0 = 1 = \theta$

5) $\underset{a^0}{1} \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}_+$

6) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \quad \forall a \in \mathbb{R}_+, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : a^{\beta\alpha} = a^{\alpha\beta}$

7) $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a \quad \forall a \in \mathbb{R}_+, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

8) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R} : (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha.$

§ 44.17(a)

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = 1 \\ \dots \end{array} \right., \quad \alpha = \frac{1}{i} = \frac{i}{-1} = -i \quad \text{Проверим: } (i, 1-i, 2+i, -1) \cdot (-i) = (1, 1-i, 1-2i, \overset{x}{(1, 1+i, 2, -3)})$

$\Rightarrow$ не конич.

§ 44.19

Т.к. пространство V изоморфно $\mathbb{R}^n$, то

а) Пусть $x_1, \dots, x_r$ — л.н.з. или л.з. тогда соотношение:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r = 0 \quad \text{или} \quad \exists \alpha_i \neq 0, \quad \text{или} \quad \forall i \alpha_i = 0.$$

$$\text{Тогда} \quad f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r) = f(0)$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_r f(x_r) \text{ по свр. изоморфизма.}$$

$$\text{Если } f(0) = 0', \quad f(0) = f(0 + 0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) = 0'$$

То есть $\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_r f(x_r) = 0'$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_r = 0$ или $\exists i \in (1, r) : \alpha_i \neq 0$.

б) Т.к. ранг системы векторов — это максималь. число л.н.з. векторов и согласно а) л.н.з. сохраняется, то и ранг не меняется.

в) Аналогично а) (пользуемся изоморфизмом).

§ 44.20 б)

$$\begin{cases} \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha_i - \beta_i - \gamma_i = 0 \\ -\alpha_i - \beta_i + \gamma_i = 0 \\ \beta + \gamma + \theta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -\theta \\ \beta = 0 \\ \gamma = -\theta \end{cases}, \quad \theta = \frac{0}{i+1} = 0 \Rightarrow \text{система л.н.з.}$$

§ 44.41

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{x_1 \leftrightarrow x_2 \\ x_2 \leftrightarrow x_3 \\ x_4 \leftrightarrow x_3}} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -34 & 18 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} = 3$$

базис: $\{x_1, x_2, x_4\}$

§ 44.43

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} = 2$$

базис: $\{x_1, x_2\}$

§ 44.47

а) в системе равно 8 векторов, отличных от нуля.

б) в системе равно $r+1$ векторов, отличных от нуля, при этом два из них коллинеарны

в) либо в системе $r+1$ вект. $\neq 0$ и три из них колл.н.,

либо $\vec{0}$ вект $\neq 0$ и $\exists$ тройка линеарно независимых векторов, в которых никакие два не коллн.

Задача

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{базис: } \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2\}.$$

Задача 44.59

Л-тб, что в n -мерном линейном пространстве любые n линейно независимых векторов образуют базис.

Доказ.

Система векторов $v_1, \dots, v_n$ в конечном пространстве V над полем K наз-ся базисом, если

- 1) $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.
- 2) векторы $v_1, \dots, v_n$ линейно независимы.

По Т. 0 том, что в конечномерном пространстве любую линейно независимую систему можно дополнить до базиса, $v_1, \dots, v_n$ является базисом т.к. кол-во векторов в этой системе $= n$.

Задача 44.62

Базис:

I) $e_1 = (1, 0, 0, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 0, 0)$, $e_3 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $e_4 = (0, 1, 0, 0, 0)$

II) $e_1 = (1, 0, 0, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 0, 0)$, $e_3 = (2, 0, 0, 0, 0)$, $e_4 = (0, 2, 0, 0, 0)$

III) $e_1 = (1, 0, 0, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1, 0, 0)$, $e_3 = (3, 0, 0, 0, 0)$, $e_4 = (0, 5, 0, 0, 0)$

IV) $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$

V) $e_5 = (0, 0, 0, 0, 2)$

VI) $e_5 = (0, 0, 0, 0, 3)$; бесконечное число.

Задача 44.63

База в M_5 :

$$\begin{pmatrix} t^0 & t^1 & t^2 & t^3 & t^4 & t^5 \\ (1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0) \\ (0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0) \\ (0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0) \\ (0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0) \\ (0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0) \\ (0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1) \end{pmatrix}$$

Нужно добавить t^5 и t^6 .

44.69

1) докажем, что база $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ образует базу в $\mathbb{R}^4$, путем нахождения α_i в $\sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i = e_i$ и т.д., где e_i - векторы естественной базы.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -2 & -5 \\ 0 & 12 & 3 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -14 \end{bmatrix} \text{ и т.д.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ и т.д. где } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

То есть, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ - база.

$$C_{e \rightarrow f} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C_{f \rightarrow e} = C_{e \rightarrow f}^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 12 & | & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 10 & | & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 12 & | & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 15 & | & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 34 & | & 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 12 & | & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & | & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{27} & -\frac{1}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 12 & | & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{11}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{34}{27} & -\frac{15}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{27} & -\frac{1}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{3}{27} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{61}{27} & \frac{5}{27} & -\frac{110}{27} & -\frac{111}{27} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{11}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{34}{27} & -\frac{15}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{27} & -\frac{1}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{3}{27} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -\frac{46}{27} & -\frac{2}{27} & \frac{98}{27} & \frac{279}{27} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{61}{27} & \frac{5}{27} & -\frac{110}{27} & -\frac{111}{27} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{11}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{34}{27} & -\frac{15}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{27} & -\frac{1}{27} & -\frac{5}{27} & \frac{3}{27} \end{bmatrix} \Rightarrow C_{f \rightarrow e} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -46 & -2 & 98 & 279 \\ 61 & 5 & -110 & -111 \\ -11 & -4 & 34 & -15 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_e = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -46 & -2 & 98 & 279 \\ 61 & 5 & -110 & -111 \\ -11 & -4 & 34 & -15 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 006 \\ -525 \\ 148 \\ -9 \end{bmatrix}$$

44.72 (a, d)

a) $(1, -1, -1, +1, -1, 1)$

d) $(1, -1, -1, 0, -1, 1)$

44.76

$$\alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 + z E_4 = 0 \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma, z = 0$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma + 3z = 0 \\ -\alpha + 5\beta + \gamma + 4z = 0 \\ \alpha + \beta + 5z = 0 \\ -\alpha + 3\beta + \gamma + 5z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5\beta + 2\gamma + 10z = 0 \\ 6\beta + \gamma + 9z = 0 \\ \alpha + \beta + 5z = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta + \gamma - z = 0 \\ 5\beta + 2\gamma + 10z = 0 \\ \alpha = -\beta - 5z = \gamma - 7z \\ \beta + \gamma - z = 0 \\ \beta = 2z - \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \gamma - 7z \\ \beta = 2z - \gamma \\ z = 2\gamma \\ 20z = 2\gamma, z = \frac{1}{10}\gamma \end{cases} \Rightarrow \perp \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma, z = 0.$$

$$(*) \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma + 3z = 5 \\ -\alpha + 5\beta + \gamma + 4z = 14 \\ \alpha + \beta + 5z = 6 \\ -\alpha + 3\beta + \gamma + 5z = 13 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -25 - (-8) + 4 - 13 = -25 + 12 + 4 = -9 \\ &= -13 + 6 - 36 + 6 = -1 - 36 = -37 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 14 & 5 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 & 5 \\ 13 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 13 & 3 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \\ 13 & 3 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 13 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Решая упр-е (*), получаем: $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

§ 44.78

Аналогично предыдущей задаче.

§ 45.2

1) Докажем, что это множество образует линейное подпространство:

а) Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_0) \in L$ и $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \beta_0) \in L$, тогда $\alpha + \beta = (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{n-2} + \beta_{n-2}, \alpha_0 + \beta_0) \in L$,

б) Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_0) \in L$, тогда и $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \cdot \alpha \in L$.

Базис: $e_1 = (1, 0, \dots, 0, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_{n-1} = (0, 0, \dots, 1, 0)$.

Размерность: $n-1$.

§ 45.3

Аналогично предыдущей;

Базис: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = (0, \dots, 1, 0)$, $e_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} = (0, \dots, 0, 1)$

§ 45.6

Аналогично предыдущей;

Размерность: $\frac{n+1}{2} \cdot n$

Базис: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_{n+(n-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_{n+(n-1)+(n-2)+\dots+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§ 45.12

$m \in M_n$, $m = (t-a)(k_{n-1}t^{n-1} + \dots + k_{n-(n-1)}t + k_0)$ — общее представление многочлена, имеющего корень a .

Аналогично предыдущей.

Базис: $e_1 = (t-a)$, $e_2 = t(t-a)$, ..., $e_{n-1} = t^{n-1}(t-a)$

Размерность: $n-1$.

45.17

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Базис: } a_1, a_2, a_4$$

Размерность: 3.

45.24

$$\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 = 0$$

$$\begin{cases} 6\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ 9\alpha + \beta + 7\gamma = 0 \\ 8\alpha + \beta + 6\gamma = 0 \\ 0 + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha + 0 + \gamma = 0 \\ 6\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6\gamma + 4\gamma + 2\gamma = 0 \\ -9\gamma + 2\gamma + 7\gamma = 0 \\ -8\gamma + 2\gamma + 6\gamma = 0 \\ \beta = 2\gamma \\ \alpha = -\gamma \\ -6\gamma + 2\gamma + 4\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2\gamma \\ \alpha = -\gamma \end{cases}$$

$$-\gamma A_1 + 2\gamma A_2 + \gamma A_3 = 0, \gamma(-A_1 + 2A_2 + A_3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \Rightarrow \alpha, \beta = 0 \\ A_1 = 2A_2 + A_3 \end{cases}$$

Размерность: 2

Базис: A_2, A_3 .

45.27

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = x \quad \text{Элем. } \langle x \rangle \quad \text{rang } A = (A|b)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & x_4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & x_1 + x_2 \\ 0 & -1 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_3 - x_1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 2 & 2 & \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_3 - x_1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} 2x_3 - x_1 + x_2 = 0 \\ x_4 + x_3 - x_1 = 0 \end{cases}$$

45.33

Произвольный базис подпространства L дополнить до базиса прост-ва V . Затем элемент. преобр. получить базис, удовл-ий условию.

44.60

Пусть $a \in V$ и $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, тогда заменив e_i ($\alpha_i \neq 0$) на a получим необх-ую базис.

44.64

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 7 & 9 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 7 & 9 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 & -3 \end{bmatrix} \oplus e_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & -2 \end{bmatrix} \oplus e_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{"Дополнение": } e_1, e_3, e_2.$$

Задача 44.66

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{универсальная система л.н.з.}$$

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = x$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta - \gamma = 1 \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma = 1 \\ -\alpha + 2\beta + 2\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta - \gamma = 1 \\ 0 + 3\beta - 3\gamma = 0 \\ -2 = -1 + 4\gamma \end{cases}, \beta = \gamma, \begin{cases} -2 + 8\gamma + 2\gamma - \gamma = 1, \Rightarrow \gamma = 3 \\ \beta = 3 \\ \alpha = -1 + 12 = 11 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x' = (11, 3, 3)^T$$

Задача 44.75

Т.к. кан-ло универсальна $\Rightarrow \dots$ не верно δ .

$$\text{Пусть } e_1 = t, e_2 = t^3, e_3 = t^5; f_1 = 2t + t^5, f_2 = t^3 - t^5, t + t^3 = f_3$$

$$\text{Тогда } f_2 - f_3 + f_1 = e_1, 2(f_2 - f_3 + f_1) + f_1 = -2f_2 + 2f_3 - f_1 = e_3,$$

$$+ 2f_2 + 2f_3 + f_1 + f_2 = -f_2 + 2f_3 - f_1 = e_2.$$

$$5t - t^3 + 2t^5 = 2e_3 - e_2 + 5e_1 = -4f_2 + 4f_3 - 2f_1 + f_2 - 2f_3 + f_1 + 5f_2 - 5f_3 + 5f_1 = 2f_2 - 3f_3 + 4f_1 = 4f_1 + 2f_2 - 3f_3 \quad \text{Ответ: } (4, 2, -3)^T$$

Задача 44.78

$$\text{Среднеарифметическое: } e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\downarrow$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -13 & -6 & 0 & 3 & 6 & 1 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \\ -320 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 10952 & 4580 & 1164 & -3034 & -4580 & -1682 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \\ -320 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 9361 & 3636 & 2312 & -4511 & -6632 & -2318 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \\ 10952 & 4580 & 1164 & -3034 & -4580 & -1682 \\ -320 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -375636 & -112701 & 7294 & 11260 & 245560 & 102988 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \\ -375636 & -112701 & 7294 & 11260 & 245560 & 102988 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1798 & 1798 & -11721 & 22802 & -32344 & -1378 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \\ -320 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} -164266 & -56164 & 3699 & 83378 & 183204 & 50734 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \\ -164266 & -56164 & 3699 & 83378 & 183204 & 50734 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \\ -164266 & -56164 & 3699 & 83378 & 183204 & 50734 \\ 428 & 116 & 82 & 106 & 116 & 74 \end{array} \right]$$

Указ,

$$C_{E-E} = \frac{1}{428 \cdot 12} \begin{bmatrix} -164266 & -56164 & 3699 & 83378 & 183204 & 50734 \\ 599760 & 215808 & -140678 & -273624 & -395568 & -164856 \\ -375636 & -112701 & 7294 & 11260 & 245560 & 102988 \\ 118416 & 43632 & -27744 & -51216 & -79584 & -32616 \\ 10952 & 4580 & -1164 & -3034 & -4580 & -1682 \\ -3840 & -1392 & 984 & 1272 & 1392 & 888 \end{bmatrix}$$

Тогда коэффициенты матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

будут следующими:

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad X_E = \frac{1}{428 \cdot 12} \begin{bmatrix} 301501 \\ -473256 \\ 288460 \\ -92304 \\ -506 \\ -768 \end{bmatrix}$$

Аналогично получим, значения.

§44.81

Пусть $f_0 = 1$, $f_1 = t-c$, $f_2 = (t-c)^2$, ..., $f_n = (t-c)^n$ и $1 \leq i \leq n$
 $e_0 = 1$, $e_1 = t$, ..., $e_n = t^n$ (Тогда e_i базисный вектор
 f_j , где $j = 1, \dots, i \Rightarrow$ базис f имеет порядок $\leq i$)
 в пространстве M_n . Но очевидно верно:
 $f(t) = f(c) + f'(c)(t-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(t-c)^n \Rightarrow$ базис: $(f(c), \dots, \frac{f^{(n)}(c)}{n!})$

§ 45.6

- а) элементы i и j строки
б) элементы i и j столбца.

§ 45.6

- 1) Пусть $a \in L$ и $b \in L$, то и $a+b \in L$, так как
2) Пусть $a \in L$, тогда и $\lambda a \in L$ ($\lambda \in R$).

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = a_1 = 0, \text{ и } a_3 = 1 \\ \downarrow \\ \text{dim } L = 1 \end{array} \right\}$$

Базис: $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = (0, \dots, 1)$, $e_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} = (0, 1, \dots, 0)$
Размерность $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$.

§ 45.5

Аналогично § 45.4

Базис: $e_1 = (1, 0, 1, \dots, 0, 1)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 1)$
Размерность: 2.

§ 45.7

Аналогично § 45.4

а) Базис образуют, например, матрица δ_{ij} ($i, j = 1, n$) у которых элементы $\delta_{ij} = \delta_{ji} = 1$, а все остальные элементы равны 0; размерность $\frac{n(n-1)}{2}$.

б) F_{ij} ($i \leq j, i, j = 1, n$) $f_{ij} = f_{ji} = 1$, а все ост. 0
размерность $\frac{n(n+1)}{2}$ $f_{ij} = f_{ji} = 1$, а все ост. 0

$$\Rightarrow \delta_i = -\delta_j, \text{ и } \delta_i + \delta_j = 0 \Rightarrow \delta_i = -\delta_j$$

§ 45.8

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim V = 3$$

Базис: e_1, e_2, e_3 .

§ 45.19

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim V = 3$$

Базис: f_1, f_2, f_3 .

§ 45.28

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x_1 \\ -1 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ -1 & 0 & -1 & x_4 \\ 1 & 3 & 7 & x_5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & x_1+x_2 \\ 0 & -1 & -2 & x_3-x_1 \\ 0 & 1 & 2 & x_4+x_1 \\ 0 & 2 & 4 & x_5-x_1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & x_4+x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-2x_4-x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_5-2x_4-x_1 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_3+x_4=0 \\ x_2-2x_4-x_1=0 \\ x_5-2x_4-3x_1=0 \end{cases}$$

§45.34

Да, $e_1 = t^5 + 1$, $e_2 = t^5 + t$, ..., $e_5 = t^5$
Нет.

Замечание

§45.39

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

Размерность: 3

Базис: a_1, a_2, a_3 ,

§45.43

Отметим, каждое из подпространств озн. сис. л. алгебр. ур-ий:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -5 & x_1 \\ 1 & 2 & -2 & x_2 \\ 0 & 3 & 1 & x_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 & x_2 \\ 0 & -3 & -1 & x_1-2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3+x_1+2x_2 \end{array} \right] \Rightarrow L_1: x_3+x_1-2x_2=0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 & x_1 \\ 1 & 3 & 0 & x_2 \\ 2 & 0 & 3 & x_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 & x_1 \\ 0 & 4 & -2 & x_2-x_1 \\ 0 & 2 & -1 & x_3-x_1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 & x_1 \\ 0 & 4 & -2 & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3-2x_2+x_1 \end{array} \right] \Rightarrow L_2: \begin{cases} x_3-2x_2+x_1=0 \\ x_1=2x_2-x_3 \end{cases}$$

Вспомогат. базис: $e_1 = (2, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 0, 1)$; $\dim(L_1, L_2) = 2$.

§45.54

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 & x_1 \\ 3 & 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 2 & -3 & x_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -3 & x_3 \\ 0 & 8 & -8 & x_2+x_3 \\ 0 & 5 & -5 & x_1+x_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -3 & x_3 \\ 0 & 8 & -8 & x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1-\frac{5}{8}x_2+\frac{3}{8}x_3 \end{array} \right] \Rightarrow L_2: 40x_1-25x_2+24x_3=0$$

Перепишем:

$$\begin{cases} 40x_1-25x_2+24x_3=0 \\ 3x_1-6x_2+3x_3=0 \\ 6x_1-4x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 40 & -25 & 24 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 12 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & 12 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 11 & 0 \\ 0 & -5 & -32 & 0 \\ 0 & -10 & -64 & 0 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 11 & 0 \\ 0 & -5 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow e_1 = (23, -32, 5) \Rightarrow \text{размерность: } 1.$$

§ 45.58

Пересечение:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_1 = (1, 1, 1, 1, 0) \Rightarrow \text{Размерность} = 2.$$

$$e_2 = (0, 1, 1, 0, 1)$$

Найти базис L_1 и L_2 соответственно:

L_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim L_1 = 3; \quad a_1 = (1, 2, 1, 0, 0)$$

$$a_2 = (0, -1, 0, 1, 0)$$

$$a_3 = (-1, -1, 0, 0, 1)$$

L_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim L_2 = 3;$$

$$b_1 = (-1, 1, 0, 0, 0)$$

$$b_2 = (2, 0, 1, 1, 0)$$

$$b_3 = (1, 0, 1, 0, 1)$$

Размерность и базис суммы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Размерность: } 4.$$

Базис $\{a_1, a_2, a_3, b_1\}$.

§ 45.73

Т.к. любой многочлен $x(t) \in M_n$ единственным образом разлагается по $1, t, t^2, \dots, t^n$ и 1) $\dim M_n = \dim L_1 + \dim L_2$
2) $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. 2 ч. з.

§ 45.74(a)

$$L_1: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$L_2: \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

В силу Т. 45.7 достаточно доказать, что $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2)$

$$L_1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim L_1 = 2.$$

$$\dim(L_1 + L_2) = 4 = \dim L_1 + \dim L_2 = 2 + 2.$$

$$p(t) = t^3 + 1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \text{ где}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1) \\ a_2 &= (0, -1, -4, -3) \\ b_1 &= (0, 0, 1, 0) \\ b_2 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$\text{тогда } p(t) = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$$

$\Rightarrow$ Проверяем $p(t)$ на L_1 и L_2 :

$$\therefore t^3 \neq t - 2.$$

45.72

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1) - \text{ae gen. neg. : } \begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1, 0) \\ e_2 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$2) - \text{ae genon. neg. : } \begin{aligned} e_1 &= (0, 0, 1, 0) \\ e_2 &= (1, 3, 0, 0) \end{aligned}$$

45.40

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -7 \\ 3 & -6 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 18 \\ 0 & -12 & 2 & 26 \\ 0 & -4 & -4 & 20 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 1 & 26 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & -6 & -5 & -4 \\ 0 & -10 & -7 \\ 0 & -8 & -12 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ размерность = 4.

Базис: $\{a_2, b_2, b_3, a_3\}$.

45.41

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Ранг = 3 Базис: $\{a_1, b_2, a_2\}$.

45.50

$$L_1: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & x_1 \\ 2 & 3 & 1 & | & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & | & x_3 \\ 1 & 0 & 2 & | & x_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & x_1 \\ 0 & -1 & -5 & | & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -1 & -2 & | & x_3 - x_1 \\ 0 & -2 & -5 & | & x_4 - x_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & x_1 \\ 0 & -1 & -5 & | & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -3 & | & x_3 - x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 5 & | & x_4 - 2x_2 + 3x_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & x_1 \\ 0 & -1 & -5 & | & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{3}(x_3 - x_2 + x_1) \\ 0 & 0 & 0 & | & x_4 - \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_1 \end{bmatrix}$$

$$L_1: 3x_4 - 5x_3 - x_2 + 4x_1 = 0$$

$$L_2: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 4 & 0 & 0 & | & x_2 \\ 1 & -2 & 3 & | & x_3 \\ 3 & -6 & 5 & | & x_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 8 & -12 & | & x_2 - 4x_3 \\ 0 & 0 & -1 & | & x_4 - 3x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 0 & -20 & | & x_2 - 4x_3 - 8x_1 \\ 0 & 0 & -1 & | & x_4 - 3x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & x_3 \\ 0 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & | & x_4 - 3x_3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -8x_1 + x_2 + 11x_3 - 5x_4 \end{bmatrix}$$

$$L_2: -8x_1 + x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 0$$

$$L_1 \cap L_2: \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ -8x_1 + x_2 + 11x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 & 3 \\ -8 & 1 & 11 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Размерность: } 2.$$

Базис: $e_1 = (-\frac{1}{2}, 1, 0, 1)$
 $e_2 = (\frac{3}{2}, 1, 1, 0)$

45.55

$$L_2: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & 3 & x_2 \\ 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 1 & -1 & -1 & x_4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & -2 & -5 & x_4 - x_1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 2 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 10x_1 - 2x_2 - 9x_3 + x_4 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_2: 10x_1 - 2x_2 - 9x_3 + x_4 = 0,$$

$$L_1 \cap L_2: \begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - 9x_3 + x_4 = 0 \\ -5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 & -9 & 1 \\ -5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim L_1 \cap L_2 = 2$$

Базис: $e_1 = (\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, 1, 0)$
 $e_2 = (-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, 0, 1)$

45.60

$$L_1 \cap L_2: \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dim L_1 \cap L_2 = \dim L', \text{ где } L' = \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\dim L_1 \cap L_2 = 2$$

Базис: $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$

$$L_1 + L_2 = L_1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \dim L_1 + L_2 = 2$$

Базис: $e_1 = (0, 1, 0, 1)$
 $e_2 = (1, 0, 1, 0)$

45.63

$$e_2 = (0, 1, 0, 1)$$

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1 \cap L_2) + 1 \Rightarrow L_1 \cap L_2 = L_1 \text{ и } L_1 \cap L_2 = L_2$$

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\dim(L_1 \cap L_2) + 1 = \dim L_1 + \dim L_2.$$

Возможны случаи в пересечении гиперплоскостей $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim L_1 = \dim(L_1 \cap L_2) \text{ и } \dim L_2 = \dim(L_1 \cap L_2) + 1 \text{ или наоборот. т.е. г.}$$

Зад. 72

$$a_3 = a_1 - 2a_2; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -9 & -18 \end{bmatrix} \Rightarrow L_1: \{a_1, a_2\}$$

$$L_2: \{b_2, b_3, b_4\}$$

$$\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = \dim L_1 + \dim L_2,$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{л.н.б.}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 4 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 14 & 3 & 22 \\ 0 & 2 & 7 & 4 & 13 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -12 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -17 \end{array} \right] \Rightarrow \underline{\beta_2 = 1}, \underline{\beta_1 = 1}; \underline{\alpha_2 = 1}, \underline{\alpha_1 = -1}$$

$$\Rightarrow x_{u_2} = -a_1 + a_2 = (-1, -2, -6, -3), \quad x_{u_1} = b_1 + b_2 = (3, 2, 6, 6).$$

Зад. 74б)

$$L_1: \begin{cases} x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}; \quad L_2: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} p(L_1) = t^3 + 1 \\ p(L_2) = t^3 + t \end{matrix}$$

$$L_2: 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \quad x_4 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_1 = 0 \Rightarrow e_1 = (0, 0, 1, 0)$$

$$4 \neq \dim L_1 + \dim L_2 = 2 + 3 = 5 \Rightarrow L_1 + L_2 \text{ абн-е прямиц.}$$

Зад. 78

$$L: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$\text{базис гомоген. подпр.: } e_1 = (1, 0, 0, 0), \text{ второе: } e_2 = (-1, 0, 0, 2).$$

Линейные функции и многообразия

Зуб. 2

Все про-во V

Зуб. 3

H явл-ся линейным подпр-ом $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b \in H, \forall a \in H, \forall b \in H \\ \alpha a \in H, \forall a \in H, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

То есть: (a) $h_1 = a + b_1 \in H, h_2 = a + b_2 \in H \Rightarrow a + (\alpha b_1 + b_2) \in H$

($\Rightarrow$) $h_1 = a + b_1 \in H, \Rightarrow \alpha a + \alpha b_1 \in H \Rightarrow \alpha a \in H \Rightarrow a \in H$

З.ч.з.

Зуб. 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow H = a + L$, где $a = (-1, 0, 1, 0)$, а $L = c_1 l_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$,

Зуб. 10

$l_1 = (2, 2, 6, 4)$

Решим аналогично задачу это означает векторов $(a_1, \dots, a_n)$ из про-ва $\mathbb{R}^n$, изоморфного про-ву M_4 .

$$a_1 t_1^2 + \dots + a_n t_n^2 + a_0 = 0, \quad a_1 t_1^2 + \dots + a_n t_n^2 = c - a_0$$

Множество решений неоднородной системы образует линейное многообразие с направляющим под-ом и век-ром сдвига: $H = a + L$, $a = (c, \underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ раз}})$, то есть $f_0(t) = c$ - вектор сдвига.

Зуб. 17

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & x_1 - 1 \\ 1 & -1 & 1 & x_2 + 2 \\ 3 & 0 & 6 & x_3 + 1 \\ -4 & 2 & -6 & x_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & x_2 + 2 \\ 0 & 2 & 2 & x_1 - 1 \\ 0 & 3 & 3 & x_3 + 5 - 3x_2 \\ 0 & -2 & -2 & x_4 + 4x_2 + 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & x_2 + 2 \\ 0 & 2 & 2 & x_1 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 5x_2 - \frac{7}{2} + \frac{3}{2}x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_1 + 4x_2 - 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_3 - 6x_2 - 7 - 3x_1 = 0 \\ x_4 + x_1 + 4x_2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 9 \end{cases}$$

§ 46.24

Например в н.з. система: $(e_1, \dots, e_k, a)$
 базис $e_1, \dots, e_k$ a — вектор
 линейно независимый.

§ 46.25

Из предг. номера базис H состоит из $k+1$ векторов $\Rightarrow$
 система из $k+1$ векторов л.з.

§ 46.41

$$x_1 + t_1 q_1 = x_2 + t_2 q_2, \quad x_2 - x_1 = t_1 q_1 - t_2 q_2$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -2 & -16 \\ -4 & 9 & -1 \\ 11 & 10 & -12 \\ 13 & 6 & -20 \\ -5 & -4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -6 & -10 \\ -4 & 9 & -1 \\ 1 & 10 & 38 \\ 13 & 6 & -20 \\ -5 & -4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 40 & 38 \\ 0 & -86 & -86 \\ 0 & -21 & -21 \\ 0 & -54 & -54 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow t_2 = 1 \Rightarrow t_1 = 38 - 40 = -2$$

$$u = x_1 + t_1 q_1 = (-5, 11, -16, -11, 7) = x_2 + t_2 q_2$$

Получено: $u \in L(q_1, q_2)$

§ 46.65

По сур $\dim L_1 = \dim L_2 = n-1$. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис прес-ва V .

Тогда базис K_1 и K_2 может получить: $e_1, e_2, \dots, e_n$
 разнотипным способом, но

где то, чтобы и было пересечение
 $a_1 \in L(K_1) \Rightarrow a_2$ и $a_1 \notin L(K_1), a_2 \notin L(K_2)$

$e_1, e_2, \dots, e_n$
 $\uparrow$
 $\downarrow$

§ 46.1

Вектор

§ 46.4

$a + (a + e_1 + e_2) \in L \Rightarrow 2a \in L \Rightarrow a \in L$ по задаче § 46.3 H — под-во.

§ 46.8

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 7x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -7 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вектор
 система:
 $a = (1, 2, 0, 0)$

$$L: e_1 = (1, 2, 1, 0) \quad \dim L = 2$$

$$e_2 = (3, 1, 0, 1)$$

§ 46.148)

$$n \cdot a \cdot t_1^{n-1} + \dots + 2a \cdot t_1 + a_1 = c \Rightarrow a = (0, c, 0, \dots, 0) \Rightarrow f_0(t) = t \cdot c$$

и $\dim H = n-1$.

§ 46.19

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 - 1 \\ 1 & 3 & 0 & x_2 - 2 \\ 2 & 1 & 1 & x_3 - 1 \\ 2 & -1 & 0 & x_4 + 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 - 1 \\ 0 & 3 & -2 & x_2 - x_1 - 1 \\ 0 & 1 & -3 & x_3 - 2x_1 + 1 \\ 0 & -1 & -4 & x_4 - 2x_1 + 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & -3 & x_3 - 2x_1 + 1 \\ 0 & 0 & 7 & -3x_3 + x_2 + 5x_1 - 4 \\ 0 & 0 & -7 & x_4 + x_3 - 4x_1 + 4 \end{array} \right] \Rightarrow H: x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

§ 46.26

Базис $H = (e_1, \dots, e_{k+1})$, где k - размерность U и 1 базис A .
 $H = a_0 + u$; $u \in e_1, \dots, e_{k+1}$ - базис U и $a_0 \in A$; $a_0 + e_1, \dots, a_0 + e_{k+1}$ - базис H .
 a_0 - базис A .

§ 46.27

Удобнее $\Leftrightarrow x_0 + x_1(\alpha_1 - \alpha_0) + \dots + x_k(\alpha_k - \alpha_0)$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$
 и есть представление H по базису,

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_0 \\ \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k = \alpha_k - \alpha_0 \end{cases} \Rightarrow 1 - \alpha_0 - k\alpha_0 = \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1 - (k+1)\alpha_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0$$

$\alpha_1 + \dots + \alpha_k = n, n \in \mathbb{R}$

$x = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_0) \Rightarrow x = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_0 = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - \alpha_1 x_0$

§ 46.37

$$\alpha_1 + t_1 \beta_1 = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = x_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - t_1 \beta_1 = x_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \frac{t_1(\beta_i - \alpha_i)}{t_2 - t_1}) x_i \\ \alpha_1 + t_2 \beta_1 = x_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = \sum_{i=1}^n \frac{(\beta_i - \alpha_i)}{t_2 - t_1} x_i \end{cases}$$

$$\alpha_1 + t_2 \beta_1 = x_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \frac{t_1(\beta_i - \alpha_i)}{t_2 - t_1} + t_2 \frac{(\beta_i - \alpha_i)}{t_2 - t_1}) x_i \in H. \text{ з.ч.г.}$$

§ 46.42

$$x_1 + t_1 q_1 = x_2 + t_2 q_2, \quad x_2 - x_1 = t_1 q_1 - t_2 q_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow t_2 = -3, t_1 = -2 \Rightarrow u = (-2, -5, -1, 1, -1)$$

Решение: $u + L(q_1, q_2)$.

§ 46.69

$x_0 + t q \neq \alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad x_0 + t q = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - t q, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$. Если $q \notin L(x_1, \dots, x_{n-1})$
 $\Rightarrow$ правая часть образует $\text{ker } V \Rightarrow \perp$. Тогда $q \in L(x_1, \dots, x_{n-1})$,
 то есть $q \in U$. з.ч.г.

Скалярное произведение.
Матрица Грама.

§47.1

$$\forall x \in E (1) \quad (0, x) = 0$$

$$\blacktriangle 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (0, x) = (0 \cdot 0, x) = 0 \cdot (0, x) = 0 \blacktriangleright$$

§47.5(a, b)

$$a) (x, y) = x_2 y_1 \neq (y, x) = y_2 x_1 = x_1 y_2 \Rightarrow \text{не с.}$$

$$b) (x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 \Rightarrow \text{с. (все 4 аксиомы выполн-е).}$$

§47.24

$$a) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \right)$$

$$b) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \beta_i^2 / \lambda_i \right)$$

$$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}; \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}, \lambda_i > 0$$

▲ Неравенство Коши-Буняковского:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \sqrt{\beta_1^2 + \dots + \beta_n^2} \Leftrightarrow a)$$

b) ...



§47.32

$$\forall x, y \in V: |x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2 (*)$$

$$\blacktriangle (*) \Leftrightarrow (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = 2(x, x) + 2(y, y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x, x) + 2(x, y) + 2(y, y) + (x, x) - 2(x, y) + (y, y) = 2(x, x) + 2(y, y) \blacktriangleright$$

§48.1

$$1) \blacktriangle (f, x_1) = 0, (f, x_2) = 0; \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow (f, x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = 0 \blacktriangleright$$

$$2) \blacktriangle (f, x) = (g, x), \quad (f-g, x) = 0 \quad \forall x \in E \Rightarrow f-g = 0 \Rightarrow f=g \blacktriangleright$$

Да, верно.

§48.5

$$4(x, y) = |x+y|^2 - |x-y|^2,$$

$$\begin{aligned} (x+y, x+y) - (x-y, x-y) &= (\cancel{x, x}) + 2(x, y) + (\cancel{y, y}) - (\cancel{x, x}) + 2(x, y) - (\cancel{y, y}) \\ &= 4(x, y) \end{aligned}$$

§ 48.19

Базис ортонорм. $\Leftrightarrow \begin{cases} (e_i, e_j) = 0 & i \neq j \\ (e_i, e_j) = 1 & i = j \end{cases}$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \text{ где } x_i, y_i - \text{коорд-ты в базисе } e_1, \dots, e_n$$

§ 48.25(3)

$$3) f_1 = (2, 0, 1), f_2 = (5, -1, 0), f_3 = (1, 7, -3)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1; \quad e_2 = f_2 - \lambda_1 e_1, \quad (e_2, e_1) = (f_2, e_1) - \lambda_1 (e_1, e_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{10 + 0}{4 + 1} = 2 \Rightarrow e_2 = (1, -1, 2) \end{aligned}$$

$$e_3 = f_3 - \frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 - \frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = (1, 9, -8);$$

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} e_1, \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} e_2, \quad g_3 = \frac{1}{\sqrt{146}} e_3.$$

§ 48.37(1)

$$1) x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$e_1 = (1, 0, 1)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$e_2 = (1, 2, -1)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$e_3 = (6, 12, -6)$$

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1, \quad g_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} e_2, \quad g_3 = \frac{1}{\sqrt{16}} e_3.$$

§ 47.2

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \text{ в базисе } e_1, \dots, e_n.$$

§ 47.6

$$(x, y) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2$$

$$(x, y) - \text{скалярн. произв-е} \Leftrightarrow (*)$$

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + a_{21}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2 \\ a_{11}x_1^2 + x_1x_2(a_{12}+a_{21}) + a_{22}x_2^2 \geq 0 \\ \mathcal{L}(x,y) = \mathcal{L}(x,y) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x+y, z) = \mathcal{L}(x, z) + \mathcal{L}(y, z)$$

Непосредственно $\Leftrightarrow A = A^T$.

Вспомогательное $\Leftrightarrow a_{11} \geq 0, 4x_2^2 a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}x_2^2 \geq 0, \det A \geq 0$.

§ 47.20

Нес, $\phi x \notin L$, потому что иначе, когда $\alpha \geq 0$.

§ 47.28

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \|f, g\|^2 = (f, f)(g, g) \Leftrightarrow \left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt$$

§ 48.3

$$(x, \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x, f_i) = 0.$$

§ 48.4

$$(x + \alpha y, x + \alpha y) \geq (x, x), \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(x, x) + 2\alpha(x, y) + \alpha^2(y, y) \geq (x, x), 2\alpha(x, y) + \alpha^2(y, y) \geq 0 \quad \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (x, y) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha c + 2\alpha^2 d \geq -(\alpha^2 b^2)(y, y) \Rightarrow c, b = 0.$$

§ 48.6

$$(x+y, x+y) - (x-y, x-y) + i(x+iy, x+iy) - i(x-iy, x-iy) = 4(x, y) \text{ (иногда введ. уи).}$$

§ 48.15(1)

a) $1, t, \dots, t^n$

§ 48.21

$$\text{Две } f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, g(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n$$

$$(f, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdot (2!)^2 + \dots + a_n b_n (n!)^2.$$

§ 48.25(2,4)

$$2) f_1 = (1, 0, -1, 2), f_2 = (2, 1, -1, 3)$$

$$e_1 = f_1, e_2 = f_2 - \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1, e_2 = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} e_1, g_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} e_2$$

$$4) f_1 = (1, 2, 2), f_2 = (1, 1, 0), f_3 = (0, 1, -4)$$

$$e_1 = f_1, \quad e_2 = f_2 - \frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = \frac{1}{3} (2, 1, -2)$$

$$e_3 = f_3 - \frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 = (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$$

$$g_1 = \frac{1}{3} e_1, \quad g_2 = e_2, \quad g_3 = \frac{1}{2} e_3.$$

Задача 54(1)

$$e_1 = a_1, \quad e_2 = a_2 - \frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = (-3, 2, 6, -4), \quad e_3 = a_3 - \frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 = (4, 6, 2, 3)$$

Векторов всего 3, т.к. $\text{rg} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 3$.

Ортонормальная система и
ортogonalное дополнение.

Задача 12(a)

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Базис орт.: } \begin{matrix} e_1 = (-2, 2, 1, 0) \\ e_2 = (-1, -1, 0, 1) \end{matrix}$$

Аналогично Задача 12(b).

Задача 15

Устно.

Задача 14(a)

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 1 \\ 0 & -2 & 13 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1, a_2, a_3 - \text{л.н.б.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & | & x_1 \\ 1 & 2 & 1 & | & x_2 \\ 3 & 0 & 1 & | & x_3 \\ -1 & -2 & -1 & | & x_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & x_2 \\ 2 & 3 & 3 & | & x_1 \\ 3 & 0 & 1 & | & x_3 \\ -1 & -2 & -1 & | & x_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & x_2 \\ 0 & -1 & 1 & | & x_1 - 2x_2 \\ 0 & -6 & 1 & | & x_3 - 3x_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & x_4 + x_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & x_2 \\ 0 & -1 & 1 & | & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 0 & -5 & | & \dots \\ 0 & 0 & 0 & | & x_1 + x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Задача 17(a, b)

$$a) a_1 = (1, \underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ раз}}) \Rightarrow L^\perp = L(b_n), \quad b_n = 1 + t + \dots + t^n$$

$$b) L(1 + 2t + 3t^2 + \dots + (n+1)t^n).$$

Задача 18(a, b)

а) Вектор-координатная матрица
 б) Вектор-координатная матрица.

Задача 26(а)

$$a) x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

Задача 26(б)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim L = 2 \Rightarrow L = L(a_1, a_2)$$

$$f = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + h \Rightarrow \begin{cases} f(a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1) \\ f(a_2) = \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f = (4, -1, -3, 4)$$

$$\begin{cases} f(a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_2, a_1) \\ f(a_2) = \alpha_1(a_1, a_2) + \alpha_2(a_2, a_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 \\ -8 = 4\alpha_1 + 10\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4\alpha_1 + 4\alpha_2 \\ -12 = 10\alpha_2 - 4\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = -2 \Rightarrow \alpha_1 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = 3a_1 - 2a_2 = (1, -1, -1, 5), \quad h = f - g = (3, 0, -2, -1)$$

Задача 14(б)

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & -13 \\ 4 & 1 & 18 & -23 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -10 \\ 0 & 7 & 10 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = (1, 2, 7, -10) \\ e_2 = (0, 7, 10, -17) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -29x_1 - 10x_2 + 7x_3 = 0 \\ 36x_1 + 17x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Задача 16

$$\text{Система уравнений } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_4 - 3x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_4 - 2x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow L = \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_4 - 3x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_4 - 2x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Задача 26(а)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\dim L = n - 2 \Rightarrow \dim L = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_1 = 0 \\ x_4 - 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_5 = 0, \dots, x_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ -2 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & x_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - 2x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & x_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

4.9.35

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & -6 & -12 & -78 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim L = \dim L^\perp$$

$$\Rightarrow e_1 = (1, -2, 1, 0) \quad e_2 = (6, -8, 0, 1) \Rightarrow f = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + h \Rightarrow f = (-3, 0, -5, 9)$$

$$\begin{cases} (f, e_1) = \alpha_1 (e_1, e_1) + \alpha_2 (e_2, e_1) \\ (f, e_2) = \alpha_1 (e_1, e_2) + \alpha_2 (e_2, e_2) \end{cases} \begin{cases} -8 = 6\alpha_1 + 22\alpha_2 \\ -9 = 22\alpha_1 + 10\alpha_2 \end{cases} \begin{cases} \alpha_1 = \frac{-8 - 22\alpha_2}{6} \\ \alpha_2 = \frac{1}{10}(-9 + 22\alpha_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = -5 \Rightarrow g = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (1, 2, -5, 1)$$

$$h = f - g = (-4, -2, 0, 8).$$

4.9.41

$$1) L: a_1 + a_3 + \dots + (-1)^n a_n = 0 \Rightarrow L^\perp: \lambda(0, 1, \dots, 1, 0) \text{ sein. unim. ver.}$$

$$2) L: a_1 = 0, a_3 = 0, \dots, a_n = 0 \Rightarrow L^\perp: q\text{-to. basis sein. unim.}$$

4.9.42

$$L: a_1 + 2a_2 + \dots + na_n = 0 \Rightarrow \dim L = n-1, \dim L^\perp = 1 \Rightarrow f(t) = g + h, h = \alpha \cdot (0, 1, 2, \dots, n) \Rightarrow (f, e_1) = \alpha \cdot (e_1, e_1) \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = (0, 2, 4, 6, 8, 10); g = f - h = (1, -2, 1, -3, -8) \\ h = 2t + 4t^2 + 6t^3 + 8t^4; g = 1 - 2t + t^2 - 3t^3 - 8t^4.$$

4.9.51

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & -5 & -3 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & -8 & 0 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim L = 1; \dim L^\perp = 3 \quad e_1 = (1, -1, -1, 1) \\ \Rightarrow f = \alpha \cdot e_1 + h \Rightarrow \alpha = \frac{(f, e_1)}{(e_1, e_1)} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = (2, -2, -2, 2);$$

$$h = f - g = (0, -3, 5, 2).$$

Суммар

Аксиомы л.ч. - п.в.а: $\forall (a, b, c) \in V$

1) $a+b = b+a$

2) $(a+b)+c = a+(b+c)$

3) $a+0 = 0+a = a, 0 \in V$

4) $a+(-a) = (-a)+a = 0, 0 \in V, (-a) \in V$

5) $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

6) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$

7) $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$

8) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

Лог-фо:

$\forall a, b \in V \Rightarrow a+b \in V$

$\lambda \in P, a \in V \Rightarrow \lambda a \in V$

Зуч.1

$\lambda x + \mu y = \mu x + \lambda y, \lambda, \mu \in P, x, y \in V \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \mu \\ \lambda x = y \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda(x-y) + \mu(y-x) = 0 \Rightarrow (\lambda-\mu)(x-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \mu \\ x = y \end{cases}$

Зуч.4(a)

а) $\lambda a = (-\lambda a_1, \lambda a_2), \lambda a = (0, \lambda a_2)$

Зуч.18(б)

$a = \lambda b; (1, i, 2-i, 3+i), (1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i)$

$\lambda = 1-i \Rightarrow b = (1-i, 1+i; 1-3i; 4-2i)$

Зуч.20(a)

$\alpha \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 0$

$\begin{cases} \alpha i - \beta i + \gamma = 0, \alpha(i+1) = \beta(i-1) \\ -\alpha - \beta + \gamma = 0, \gamma = \alpha + \beta \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\alpha i + \beta i - \gamma = 0, \beta(i-1) = \alpha(i+1) \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha \frac{i+1}{i-1} = \beta, \alpha \frac{(i+1)^2}{-2} = \beta, \alpha (\frac{1}{2} - i - \frac{1}{2}) = \beta$

44.40

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 3 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

44.46

$$(\beta_1 + \beta \alpha_1)x_1 + (\beta_2 + \beta \alpha_2)x_2 + \dots + \beta \alpha_j x_j + \dots + (\beta_r + \beta \alpha_r)x_r = 0.$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta \alpha_1 = 0 \\ \beta \alpha_j x_j = 0 \\ \beta_r + \beta \alpha_r = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{if } j.$$

Next Lemma

44.50

$$\dim V = n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ - base}$$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \text{ - a.s.} \Rightarrow \exists \alpha_i: \alpha_i \neq 0, \dots$$

44.61

44.63

44.69

$$[F|G] \sim [F|F^T B] \text{ mod. equiv.}$$

45.1

$$\begin{aligned} a &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n), \quad a+b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}, \alpha_n + \beta_n) \\ b &= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n); \quad y \cdot a = (y \alpha_1, y \alpha_2, \dots, y \alpha_{n-1}, y \alpha_n); \\ \alpha_n &= \alpha_n, \alpha_n - \alpha_n = 0; \quad \dim L = n-1 \end{aligned}$$

45.3

$$n \rightarrow \infty, \quad a = (\alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_n, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{n}{2} \text{ - char. number} \Rightarrow \dim L = \frac{n}{2}.$$

$$\text{base } e_1 = (1, 0, \dots, 0) \\ e_n = (0, \dots, 1)$$

n -матрица; $\dim L = \frac{n+1}{2}$.

Задача

$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid a_{ij} = -a_{ji}\}$; $\text{rank } A = \frac{n^2-n}{2}$ - rank в n .
 $\Rightarrow \dim L = n^2 - \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, e_{\frac{n^2+n}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача

$P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x)$; $\text{Следствие: } \frac{x-a_1, x-a_2, \dots, x-a_n}{x-a_1, x-a_2, \dots, x-a_n} = 1$

Задача

$V = \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Следствие: } \{a_1, a_2, a_3\}$$

Задача

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 8 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 6 & -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Задача

$$a_1 = (1, -1, 1, 0),$$

$$a_2 = (1, 1, 0, 1),$$

Даны $n \times n$ матрицы: $a_{ij} = -a_{ji}$

a) $n \in \mathbb{Z}$; $\begin{cases} a_{ii} = -a_{ii} \\ (1+1)a_{ii} = 0 \end{cases} \Rightarrow a_{ii} = 0 \text{ (exp. n. } \neq 2)$
 $a_{ii} \in \mathbb{R} \text{ (exp. n. } = 2)$

Пересечение подпространств

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2$$

Задача

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{matrix}$$

Задача

Задача

$$x = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3 = \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2 + \beta_3 \bar{b}_3;$$

Hauptidelemente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & | & x_1 \\ 1 & 2 & -2 & | & x_2 \\ 0 & 3 & 1 & | & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & | & x_2 \\ 0 & -3 & -1 & | & -2x_2 + x_1 \\ 0 & 3 & 1 & | & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & | & x_2 \\ 0 & -3 & -1 & | & -2x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & x_1 - 2x_2 + x_3 \end{bmatrix} \dots$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$n \in \mathbb{R}^3, A = \dim L_1 \cap L_2$

$$\Rightarrow p_1 = 7p_2 \quad \Rightarrow \beta_1 \beta_2 = (7, 7, 14)$$

$$p_2 = 1; \quad \beta_1 = 7 \quad \beta_2 \beta_3 = (-1, 3, 0) \quad x = (6, 13, 14)$$

$$x = 7\beta_1 + \beta_2$$

§ 45, 44

$$L_1: \begin{cases} 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} a_1 = (2, 3, -1) \\ a_2 = (1, 2, 2) \\ a_3 = (1, 1, -3) \end{cases}$$

$$L_2: \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 1 & 2 & 1 & | & x_2 \\ -1 & 2 & -3 & | & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & | & x_2 \\ 2 & -3 & 1 & | & x_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & -1 & -1 & | & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -5 & -1 & | & x_3 - 2x_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -7 & | & x_3 - 2x_1 + 5 + 5(2x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 8 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \dim L_1 \cap L_2 = 1.$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 3 & 5 & 1 \end{matrix} \quad \vec{x} \in (3, 5, 1).$$

§ 45, 44

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

$$L_1 = \{ f(t) \in M_3 \mid f(1) = f'(1) = 0 \} \quad L_2 = \{ a + b + c + d = 0, \quad 3a + 2b + c = 0 \} \quad \text{§ 45, 44}$$

$$L_2 = \{ f(t) \in M_3 \mid f(1) = f'(1) = 0 \}$$

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2; \quad L_2 = \begin{cases} d = 0 \\ e = 0 \end{cases} \quad \text{§ 45, 44} \quad t^3, t^2, t, 1$$

$$P(t) = 2K_1 + 3K_2 + 4M_1 + 5M_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(t) = 2K_1 + (-3)K_2 + \dots$$

$$2K_1 - 3K_2 = 2t^3 - 6t^2 + 4 - 3t + 6 - 1 = 2t^3 - 3t^2 + 1.$$

Задан. н-л: $U \oplus U^\perp = V$.

№45.77

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 3, 0, -1), & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ a_2 &= (2, 5, 1, 2), \\ a_3 &= (1, 2, 4, 3); \end{aligned}$$

Аргументе uniqueness.

$$\begin{aligned} H_1 &= x_1 + U_1, \quad H_2 = x_2 + U_2, \quad H_1 = H_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2) \in U \\ &\quad U_1 = U_2 = U \\ Ax &= b, \text{ если } x \in H, \text{ то } U = x_0 + U \\ H_1, \text{ н-л } H_2, \text{ если } U_1 \in U, \\ &\quad \text{или } U_2 \in U. \end{aligned}$$

~~Т. 45.77~~ $y_1 - y_2 \in U, \quad x_0 \in H; \quad y_1 = x_0 + x_1, \\ y_2 = x_0 + x_2$

№46.2

$$\dim H = \dim V = n, \quad H = V.$$

№46.3

$$U = a + U \rightarrow \text{н-л} \Leftrightarrow a \in U;$$

$$\Rightarrow H = a + U = \text{н-л} \quad a \in H, \quad \lambda a \in H, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

$$\lambda a = a + x; \quad x \in U; \quad a \in U.$$

⊆ свойства же имеют.

№46.7

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1, 0, 1, 0) - баз. перм.

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

№46.11(a)

c-линей. опера; $\dim U = n$.

Задача 12

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & | & x_1 - 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & x_2 + 2 \\ 3 & 0 & 6 & | & x_3 + 1 \\ -1 & 2 & -6 & | & x_4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & | & x_1 + 2 \\ 0 & 3 & 3 & | & x_2 + 1 - 3x_1 - 6 \\ 0 & -2 & -2 & | & x_3 + 4x_1 + 8 \\ 0 & 2 & 2 & | & x_4 - 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & x_1 + 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & \frac{x_2 - 5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & x_3 + 4x_1 + 8 + x_1 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & x_4 - 3x_2 - 9 - \frac{2}{3}(x_1 - 1) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_4 = -7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_4 = -7 \end{cases}$$

Задача 14

$$x_0 + c_1 \rightarrow x_0 + c_n, x_0$$

$$x_0 + x = \alpha_1(x_0 + c_1) + \alpha_2(x_0 + c_2) + \dots + \alpha_k(x_0 + c_k) + x_0(1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_k)$$

$$y_1 \rightarrow y_k, y_{k+1}, y_{k+2} \text{ н.у.}$$

$$y_2 - y_1 \rightarrow y_{k+2} - y_1 \text{ н.у.} \in U \Rightarrow \perp$$

Задача 11

$$x_1 + t_1 q_1 = x_2 + t_2 q_2$$

$$t_1 q_1 - t_2 q_2 = x_2 - x_1$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -2 & | & -16 \\ -1 & -3 & | & -1 \\ 4 & 10 & | & 12 \\ 13 & -6 & | & -20 \\ -5 & -4 & | & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -5 & | & 7 \\ 0 & -20 & | & -25 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} t_2 = 1 \\ t_1 = -2 \end{matrix}$$

Задача 65

$$H_1 = L_1 + a_1, \dim L_1 = \dim L_2 = n-1$$

$$H_2 = L_2 + a_2, \dim V = n; H_1 \cap H_2 = \emptyset$$

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = a_1 \\ \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n = a_2 \end{cases} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n & | & a_1 \\ \beta_1 & \dots & \beta_n & | & a_2 \end{pmatrix}$$

Задача 13

Задача 26

$$H = x_0 + L, x_0, x_1, \dots, x_k \text{ — н.у. векторов}$$

$$H = x_0 + L(x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0) \quad H' = H \Leftrightarrow L = L' \text{ и } x_0 - a_0 \in L$$

$$H' = a_0 + L'(a_1, \dots, a_k)$$

$$\Rightarrow x_0 = a_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) + \dots + \alpha_k(x_k - x_0) \\ a_0 = x_0 \text{ и } \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0 \Rightarrow \text{н.у.}$$

V-um. np-60. ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$ um $\mathbb{P} = \mathbb{C}$)

547.1

$$(0, x) = 0 \quad \forall x; \quad (y - y, x) = (y, x) - (y, x) = 0. \quad (-1)y = -y.$$

$$0 = 0 \cdot y; \quad 0(y, x) = 0.$$

547.5(a, c)

$$(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2,$$

$$(y, x) = 2y_1x_1 + 3y_2x_2; \quad (2x, y) = 2(2x_1y_1 + 3x_2y_2) = 4x_1y_1 + 6x_2y_2, \dots, \text{coeff. are - inv.}$$

547.24

8)

547.22

$$|x+y| = \sqrt{(x+y, x+y)}$$

548.1

$$f \neq 0, \quad (f, x) = 0 \quad \forall x \in E; \quad \alpha f \neq f \Rightarrow (\alpha f, f) = \alpha(f, f) \neq 0.$$

$$(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

548.9(2)

$$2) \quad (f, x) = (g, x) \quad \forall x \in E; \quad e_1, \dots, e_n$$

$$f = \sum_{i=1}^n (f, e_i) e_i \quad g = \sum_{i=1}^n (g, e_i) e_i \quad f_i = g_i; \quad (f - g, x) = 0 \Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g.$$

548.5

$$4(x, y) = |x+y|^2 + |x-y|^2$$

548.9

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

548.25(1)

$$f_1 = (2, 0, -1)$$

$$f_2 = (5, -1, 0)$$

$$f_3 = (4, 7, -2)$$

$$g_1 = (2, 0, -1)$$

$$g_2 = f_2 + 2g_1, \quad (g_2, g_1) = 0$$

$$\alpha = \frac{(f_1, g_1)}{(g_1, g_1)} = -2$$

$$g_2 = (1, -1, 2)$$

$$g_3 = f_3 + \alpha g_1 + \beta g_2$$

$$\begin{cases} (1/3 + \beta g_1 + \gamma g_2, g_1) = 0 \\ (1/3 + \beta g_1 + \gamma g_2, g_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = -1; \\ \gamma = 2;$$

$$g_1 = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}) \\ g_2 = (1, -4, 2) \\ \beta = (1, 5, 2)$$

Σ 48.32(1)

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$f_1 = (1, 1, 0), \quad f_2 = (x_1, x_2, x_3) \\ f_2 = (1, 1, 2)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e_1 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0), \quad e_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$$

Дополнение к З3:

Σ 48.37(3)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 9 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$e_1(9, 7, 1, 1),$$

$$e_2(5, 5, 5, 7).$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 16 & 10 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 42 & 90 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Саммат

Σ 49.11

$$a_1 = (1, 0, 2, 1)$$

$$a_2 = (2, 1, 2, 3)$$

$$a_5 = (0, 1, -2, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

$$-1, -1, 0, 1$$

$$-2, 2, 1, 0$$

Σ 49.15

$$L = \begin{cases} a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \\ b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0 \\ \dots \\ c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = 0 \end{cases}$$

$$\dim L = n - 2$$

$$\dim L = 2$$

2549.140a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_1 = (0, 1, 0, 1) \Rightarrow x_2 + x_4 = 0.$$

1549. 17 (a b).

a) $U: f(1) = 0$

$$\dim L = (2+1) - 1 = 2$$

$$L: a_0 \tau_n + a_n = 0,$$

$$L^+ = \alpha((1, \dots, 1))$$

$$\sqrt{49.18(45)}$$

a) b: $a_{11} + \dots + a_{nn} = 0$,

$$a_{11} + \dots + a_{nn} = 0, \quad \dim U = n-1, \quad \text{so } U = \mathbb{C}^n. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8) $L: a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j; \quad \dim L = \frac{n(n+1)}{2},$
 $a_{ij} - a_{ji} = 0, \quad \forall i, j.$

$$\begin{bmatrix} \infty \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \dots$$

 $\sqrt{43.26 \text{ cm}}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\dim V^{\perp} = 2$$
$$\dim W = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & b \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{49.32}$$

$$V = L \oplus L^\perp \Rightarrow f = \underbrace{g}_L + \underbrace{h}_{L^\perp}$$

$e_1, \dots, e_n$ - Folge U
 $f = g_1 e_1 + \dots + g_k e_k + h$

$$\sqrt{50.9}$$

ۛ ۛ ۛ

$$g(x, b) = \inf_{y \in L} |x - y|, \quad = \inf_{y \in L} |x - (g+h)| = \inf_{y \in L} |h| = |h|.$$

50.29

$$a_1 = (1, 1, 1); a_2 = (4, 0, 5);$$

$$V = L \oplus L^\perp; \quad \bar{f} = \bar{g} + \bar{h}, \quad g(f, h) = |h|$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow e = (5, -1, -4), \quad f = g + \alpha e \Rightarrow (f, e) = (g, e) + \alpha (e, e)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{42}{42} = 1.$$

$$\Rightarrow h = e; \quad |h| = \sqrt{25+16+16} = \sqrt{42}$$

50.33

$$f = (-1, -2, 3, -4), \quad L: \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \Rightarrow L^\perp = L(1, 1, 1, 1).$$

$$(f, e) = \alpha \cdot (e, e) \Rightarrow \alpha = \frac{-1-2+3-4}{4} = -1 \Rightarrow |h| = 2.$$

50.42

$$g(x, L) = \frac{|(x, a)|}{|a|}, \quad a \in L^\perp; \quad x = g + h = g + \alpha a; \quad (x, a) = \cancel{g(a)} + \alpha (a, a)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(x, a)}{(a, a)} \quad h = \frac{(x, a)}{(a, a)} a$$

$$\Rightarrow |h| = \frac{|(x, a)|}{|a|^2} \cdot |a| = \frac{|(x, a)|}{|a|}$$

50.26

$$\cos \varphi = \frac{(a, b)}{|a||b|}; \quad \inf \varphi: \cos \varphi = \frac{(a, b)}{|a||b|}, \quad b \in L; \quad f_e = (0, 2, 1, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \dim L = 1$$

$$\Rightarrow e_1 = (-1, 1, -1, 1)$$

$$f = g + h$$

$$\Rightarrow (f, e_1) = \alpha (e_1, e_1) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$g = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1).$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{\frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1) \cdot (0, 2, 1, 1)}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

51.17(a)

$$H = x_0 + L, \quad g(x, H) = \inf_{y \in H} (x, y) = \inf_{y \in L} (x - x_0, y)$$

$$g(x, H) = g(x - x_0, L)$$

$$H_1 = x_1 + L_1; \quad g(H_1, H_1) = \inf_{y \in H_1} (y, y); \quad g(H_1, H_1) = g(x_1 - x_0, L_1 + L_1)$$

$$H: \quad a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n = 1; \quad H = x_0 + L; \quad x_0 = (1, 0, \dots, 0), \quad x - x_0 = (0, t, \dots, t^n).$$

$$x(t) = 1 + t + \dots + t^n;$$

$$x - x_0 = g + h, \quad |h| = g(x, H) \quad L^+ : \Delta(\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}); \lim L^+ = 1.$$

$$(h, x - x_0) = \alpha(e_1, e_1) = (x - x_0, e_1) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{n+1}, \quad h = \alpha e_1 \Rightarrow |h| = \frac{1}{n+1} \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

51.20

$$\text{найдем } g = g(x_1 - x_2, h_1 + h_2); \quad x_1 - x_2 = (2, 3, -3, 2); \quad q_1 = (1, 2, -4, 1)$$

$$x_1 - x_2 = \alpha q_1 + \beta q_2 + h$$

$$h_1 + h_2 = \alpha(q_1, q_2); \quad q_2 = (1, 0, -1, 0)$$

$$\begin{cases} (x_1 - x_2, q_1) = \alpha(q_1, q_1) + \beta(q_2, q_1) \\ (x_1 - x_2, q_2) = \alpha(q_2, q_1) + \beta(q_2, q_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 - x_2, q_1) = \alpha(q_1, q_1) + \beta(q_1, q_1) \\ 22 = 22\alpha + 5\beta \quad (\alpha, \beta) = (1, 0). \end{cases}$$

$$\Rightarrow h = x_1 - x_2 - q_1 = (1, 1, 1, 1) \Rightarrow g(H_1, H_2) = 2.$$

55.6

55.6

$$|f|^2 = (f_i, f_i); \quad |f_1 + f_2|^2 = (f_1 + f_2, f_1 + f_2) = \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \quad \text{так как } (f_i, f_j) = 0 \quad i \neq j.$$

55.7

$$(f_1 + f_2, f_1 + f_2) = (f_1, f_1) + (f_1, f_2) + (f_2, f_1) + (f_2, f_2) = |f_1|^2 + |f_2|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(f_1, f_2)}_a + \underbrace{(f_2, f_1)}_{\bar{a}} = 0 \quad \text{где очевидно верно.}$$

$$\Rightarrow a + \bar{a} = 0 \quad (\Rightarrow) \alpha = 0, \text{ тогда } \alpha \text{ не равно нулю.}$$

55.30

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f = g + h, \quad g = \alpha e_1 + \beta e_2; \quad f = (1, 0, 2, -2)$$

$$\begin{cases} (f, e_1) = \alpha(e_1, e_1) + \beta(e_2, e_1) \\ (f, e_2) = \alpha(e_1, e_2) + \beta(e_2, e_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = 3\alpha + 3\beta \\ -6 = -3\alpha + 6\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow -3 = 3\beta, \quad \beta = -1; \quad \alpha = 0$$

$$\Rightarrow g = -e_2 = (0, -1, 2, -1) - \left(\frac{2}{3}(e_1 + 2e_2)\right) = -\frac{2}{3}(1, 1, -3, 2)$$

$$\Rightarrow h = f - g = (1, 1, 0, -1) \Rightarrow |h| = \sqrt{3}. \quad \left(-\frac{2}{3}(1, 1, -3, 2)\right) \Rightarrow |h| = \frac{2}{3}\sqrt{5} + 2 = \frac{2}{3}\sqrt{5} + 2$$

55.34

$$\int \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 20 = 6\alpha + \beta, & \beta = 20 - 6\alpha \\ 25 = \alpha + 11\beta, & 25 = \alpha + 220 - 66\alpha \Rightarrow \alpha = ? \Rightarrow \beta = 2 \end{cases}$$

$$h = 3e_1 + 2e_2 = (3, -4, 9, 2) \Rightarrow |h| = \sqrt{110}$$

§50.44

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0 : L; \quad L^\perp = \alpha(1, 1, \dots, 1);$$

$$(g(t), e) = \alpha \cdot (e, e); \quad \alpha = \frac{(g(t), e)}{(e, e)} \quad \text{Тогда } \rho = |h| = |\alpha \cdot e| = |\alpha| \cdot |e|$$

$$= \frac{(g(t), e)}{(e, e)} \sqrt{(e, e)} = \frac{|g(t)|}{\sqrt{n+1}}$$

§51.17(б)

$$x(t) = 1 + t + \dots + t^n;$$

$$H: \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_0 + \dots + a_n = 1 \end{cases}; \quad H = x_0 + L; \quad x_0 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$g(x, H) = g(x - x_0, L); \quad x - x_0 = t + \dots + t^n$$

$$\dim L^\perp = 2, \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (1, 1, \dots, 1) \Rightarrow \begin{cases} (x - x_0, e_1) = \alpha \cdot (e_1, e_1) + \beta(e_2, e_1) \\ (x - x_0, e_2) = \alpha \cdot (e_1, e_2) + \beta(e_2, e_2) \end{cases}$$

$$h = \alpha e_1 + \beta e_2$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta, & \alpha = -\beta \\ n = \alpha + (n+1)\beta, & \beta = 1, \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow h = -e_1 + e_2 = (0, 1, \dots, 1) \Rightarrow |h| = \sqrt{n}$$

§51.24

$$x_1 - x_2 = (5, -1, -5, 2, 2); \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 8 & 7 & -2 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & -9 & -18 & 9 & -9 \\ 0 & -6 & -12 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim L^\perp = 2; \quad e_1 = (1, 1, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 2, -1, 1) \Rightarrow h = (\alpha e_1 + \beta e_2) \cdot (-1) + f = x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} 4 = 2\alpha + \beta, & \beta = 4 - 2\alpha \\ -11 = \alpha + 7\beta, & -11 = \alpha + 7 \cdot 4 - 14\alpha, \alpha = \frac{28-4}{13} = \frac{24}{13} = 3 \Rightarrow \beta = -2 \Rightarrow g = 3e_1 - 2e_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g = (3, 1, -4, 2, -2) \Rightarrow h = (2, -2, -1, 0, 4) \Rightarrow |h| = \sqrt{16+1+8} = 5.$$

Линейный оператор

§52.3

а) $Ax = a$ кет, если $a \neq 0$

б) аналогично а)

в) г) ...

$\sqrt{52}$

also, δ_1 ker γ : $A \otimes x = (\alpha x_3, \alpha x_1, \alpha x_2 - 1) \neq (\alpha x_3, \alpha x_1, \alpha x_2 - 2)$

$$\angle 52.7$$

a) ja, 2) $(2f(t))' = 2f'(t)$, $(f+g)' = f' + g'$ ja ab-ül.

g) $Af(b) = f(b+1) - f(b)$, $A(2f) = 2(f(b+1) - f(b)) = 2f(b+1) - 2f(b) = 2Af(b)$
 $A(f+g) = (f(b+1) + g(b+1)) - (f(b) + g(b)) = (f(b+1) - f(b)) + (g(b+1) - g(b))$ u. a. b. u. a. c.

e) $A_f(x) = f(x+1) - f(x)$, где $f(x)$ произв. действ. многочл.

$$A(t+y) = f(b+y(t)-g(t)); \quad A_f'(t) + A_g'(t) = f'(b+y(t)-g(t)) - g'(t) \text{ по } t.$$

552.11

a) $AX = X^T$, $A(B+C) = (B+C)^T = B^T + C^T = AB + AC$,
 $A(\alpha B) = (\alpha B)^T = \alpha B^T = \alpha AB$

5) $AX = BX$, B - жог. анык.; $A(C+D) = A(C+D) = AC + AD = A(C+D)$
 $A(\alpha A) = B(\alpha A) = \alpha AC$.

252. 19 ॥ २१

а) $f(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$ $z=0$ будет.

б) $f(x) = (x, a)$, a -яг. көнөр. сүүл

2) $f(x) = (x, x)$ sur

\$52.24

52.24 $A_f = Q_{ef}^{-1} A_e Q_{ef}$; $A_x^{(x_1, x_2, x_3)} = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$

a) $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1) \Rightarrow A_{e_1} = (0, 2, 3)$
 $A_{e_2} = (1, 0, -1) \Rightarrow A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
 $A_{e_3} = (1, 1, 1)$

$$d) f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_2 + e_3, f_3 = e_1 + e_3$$
$$Q_{e \rightarrow f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_f = Q_{e \rightarrow f}^{-1} A_e Q_{e \rightarrow f} \quad A_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\cancel{Q^{-1} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] B = Q^{-1} A ; \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$BQ_{ef} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A_f.$$

§ 52.24

$$f_1 = (2, 3, 5) \quad g_1 = (1, 1, 1)$$

$$A_{ef_1} = g_1$$

$$A_f = Q_{ef}^{-1} A_e Q_{ef} = GF^{-1} F$$

$$f_2 = (0, 1, 2) \quad g_2 = (1, 1, -1)$$

$$A_{ef_2} = GF^{-1}$$

$$A_f = FGF^{-1}F = FG$$

$$f_3 = (1, 0, 0) \quad g_3 = (2, 1, 2)$$

$$A_{ef_3} = G$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 5 & -5 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1}G = GF^{-1}$$

§ 52.39

$A = D$ - diag. grup.

$$A_e = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}$$

§ 52.46

$$Ax = [x, a], \quad Ae_1 = [e_1, a] = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} =$$

$$= -a_3 e_2 + a_2 e_3. \quad Ae_2 = [e_2, a] = [e_2, a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3] = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

$$Ae_3 =$$

$A_e =$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & a_3 - a_1 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 - a_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ суг-зи антисимметрич.}$$

Q1:

§ 52.4

$$a) Ax = (x, a)a, \quad A(\lambda x) = \lambda(x, a)a = \lambda Ax; \quad A(x+y) = (x, a)a + (y, a)a = Ax + Ay$$

$$b) Ax = (a, x)b, \quad A(\lambda x) = \lambda(a, x)b = \lambda Ax; \quad A(x+y) = ((a, x) + (a, y))b = Ax + Ay$$

$$b) Ax = (c, x)x, \quad A(\lambda x) = \lambda^2(c, x)x; \quad \lambda Ax = \lambda(c, x)x$$

c) да, если $\lambda = 0$ или $a = 0$

$$2) Ax = [x, a], \text{ да}$$

$$3) Ax = [a, [x, b]] \text{ да.}$$

§ 52.6 (6, 8, 9)

6) $Ax = (x_2, x_1 - x_2)$; $A^2x = (2x_2, 2(x_1 - x_2)) = 2(x_2, x_1 - x_2) = 2Ax$;
 $A(x+y) = (x_2+y_2, x_1+y_1-x_2-y_2)$; $Ax+Ay = (x_2+y_2, x_1-x_2+y_1-y_2)$ *га*.

8) $Ax = (x_1+x_2, x_2)$

$A(x+y) = (x_1+y_1, x_2+y_2) \neq (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ *неверно*.

9) $Ax = (x_1+3x_2-2x_3, 3x_1+x_2-x_3, 2x_1+3x_2-x_3)$

$A(x+y) = (x_1+y_1+3(x_2+y_2)-2(x_3+y_3), 3(x_1+y_1)+x_2+y_2-x_3-y_3, 2(x_1+y_1)+3x_2+y_2-x_3-y_3)$
 $Ax+Ay = (x_1+...)$ *га*.

§ 52.8

a) $D(\alpha t_m) = \alpha(t_m)' = \alpha g_{m-1}$; $D(t_n + u_k) = (t_n)' + (u_k)' = g_{n-1} + f_{k-1}$

б) аналог.

в) аналог.

§ 52.9

$A: f(t) \rightarrow f(t^2)$ $A \circ f(t) = \alpha f(t^2) = \alpha A f(t)$; $A(f(t) + g(t)) = z(t) = A(f(t)) + A(g(t))$ *га*

§ 52.12 (a, б, в)

a) $X = \underbrace{\frac{1}{2}(X+X^T)}_{\text{симм.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(X-X^T)}_{\text{антисимм.}}$ $\Rightarrow$ a) L_1 -симм. метр. б) L_2 -оптимальный метр.

§ 52.20

$A(\alpha x) = \alpha x_i = \alpha A(x)$; $A(x+y) = x_i+y_i = A(x)+A(y)$.

§ 52.25

$Ax = (x_1-x_2+x_3, x_3, x_2)$ a) $A_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ б) $f_1 = e_1+e_2, f_2 = e_2+e_3, f_3 = e_1+e_3$.
 $e_1 = (1, 0, 0)$
 $e_2 = (0, 1, 0)$
 $e_3 = (0, 0, 1)$

$B = Q_{e \rightarrow f}^{-1} A_e$; $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_{A_f} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 52.28

$A_e = GF^{-1} \Rightarrow A_f = Q_{ef}^{-1} A_e Q_{ef} = F^{-1} G F^{-1} F = F^{-1} G \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\rightarrow F^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_c = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & -21 & 9 \\ 5 & 9 & -6 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

§ 52.42

$$A f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = \frac{1}{t} (F(t) - F(0)) = \frac{F(t)}{t} \Rightarrow A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix}$$

kin pos.

$$R x = x_1 - x_2$$

§ 52.48(8)

$$L: \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow (1, -1, 0) \stackrel{f_2}{=} \text{Basis } L^+; \text{Basis } L: \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} = f_1$$

$$P_{f_1} = f_1, P_{f_2} = 0, P_{f_3} = 0 \quad P_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q_{ef} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_c = Q_{ef} P_f Q_{ef}^{-1}$$

$$P_f = Q_{enf}^{-1} P_c Q_{enf}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_c = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

§ 52.54(a)

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E_1 \Rightarrow [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

§ 53.4(8)

$$S_1 = A_1 = Q_{enf}^{-1} A_c Q_{enf};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{53.1211}$$

$$g_1 = (1, 1, 1)$$

$$g_2 = (2, 0, -6)$$

$$g_3 = (0, 2, 6)$$



$$A_e = \cancel{FG} GF^{-1}; \quad A_f = Q_{e \rightarrow f}^{-1} A_e Q_{e \rightarrow f}$$

$$A_f = \underbrace{Q_{e \rightarrow f}^{-1}}_{F^{-1}} GF^{-1} \underbrace{Q_{e \rightarrow f}}_F = FG$$

5318(a)

$$[A]_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} - & - \end{bmatrix}$$

$$A_f = Q_{e \rightarrow f}^{-1} A_e Q_{e \rightarrow f}$$

52.48(a)

$$L: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = L(f_1), f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f = g + h$$

✓ 52.49(a)

$$L_1: x=0; \Rightarrow L_1^\perp: \mathcal{L}(f_1) \ni f_1 = (1, 0, 0); L_2 = \begin{cases} x-y=0 \\ z+2y=0 \end{cases} \Rightarrow f_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L: d(f_2, f_3); f_2 = (0, 0), f_3 = (0, 0, 1).$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ +2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = -2f_1 + f_2 + 2f_3 \Rightarrow \hat{p}e_1 = f_2 - 2f_3$$

53.1

53.3

а) помен i и j ставбу.
б) i ставб. умен j на 2 .

Enr. - l.

§ 53.4(a)

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

§ 53.12(2)

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

k.n. pad.

§ 54.3(a)

$$a) Ax = [x, a], \quad [x, a] = 0 \Leftrightarrow x = 2a; \\ [x, a] = y; \text{ in } A = \{y : (y, a) = 0\}$$

§ 54.5

Unger: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{rank of } A = 1 \Rightarrow (1, 1, 1) \text{ Ser. ker } A$

$$A(1, 0, 0) = (2, 1, 1) \\ A(0, 1, 0) = (-1, -2, 1) \\ A(0, 0, 1) = (-1, 1, -2)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ ko cr. (2 n. n. g. cr. b. g.)}$$

§ 54.10(3)

$$n=3, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{rg } A = 2 \quad \text{Ser. in } A: e_1 = (0, 1, -1); \text{ Ser. ker } A = (1, -1, 1), \\ e_2 = (1, 1, 0)$$

ke unrepresentable $\Rightarrow$ ke unrepresentable

§ 54.11(3) (6)

Аналогично

§ 54.17

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ def } A = 1; \text{ ker } A = M_0 \\ \text{in } A = M_{n-1}$$

§ 54.21

§ 54.38

$$A: V \rightarrow W; V = \text{ker } A \oplus L \quad \dim = \text{rg } A = k \quad \text{Базис в } L \text{ и н. н. г. базис.} \\ e_1, \dots, e_n \text{ - Ser. } L \quad A(e_1), \dots, A(e_n) \in \text{Im } A \subseteq W$$

§56.8

$V = U_1 + U_2$, $x = x_1 + x_2$ i. d. $\ker P \cap \operatorname{im} P = \{0\}$ weil P -projektiv

$$\exists x \in (\ker P \cap \operatorname{im} P) \Leftrightarrow x \in \ker P, Px = 0 \vee x \in \operatorname{im} P, x = Py \wedge P^2 y = Py = x = 0.$$

$$V = \underbrace{\ker P}_{U_1} \oplus \underbrace{\operatorname{im} P}_{U_2}$$

$$Px = Px, \overset{?}{=} x_1 = PPy = Py = x_1$$

$$P^2 = P \Leftrightarrow \text{proj. idemp.}$$

§56.60

$$A: V \rightarrow V; A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

§58.18/8)

$$A, B \in L(V, W); \ker A = \ker B = N;$$

$$(A+B)x = Ax+Bx = 0 \Leftrightarrow \ker(A+B) \supseteq \ker A$$

Nun $x \in \ker(A+B) \Rightarrow (A+B)x = 0 = Ax+Bx \Rightarrow Ax = -Bx \Rightarrow$ mit gegebenem x aus N folgt $-Bx \in N$
 Folglich, $N = V$.

§54.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{def} A = 2 \Rightarrow \text{Sätze: } \begin{pmatrix} -1, 1, 0 \\ -1, 0, 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A = 1$$

$$\text{Satz im } A: (1, 1, 1)$$

§54.10(2,4)

$$2) n=3; A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}; \text{ i. d. } Ax=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{def} A = 2$$

$$\Rightarrow \text{Satz im } A: (-2, -2, 2); \text{ i. d. } \dim \operatorname{im} A = 3 \Rightarrow \text{ne linear.}$$

$$\text{Sätze ker } A: \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{def} A = 2, \text{ Sätze: } \begin{pmatrix} 1, 1, 1, 0 \\ 0, -1, 0, 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{im} A: \text{Sätze: } \begin{pmatrix} 1, 1, -3, -3 \\ 1, -1, -1, 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ke un. } \operatorname{im} A = 2 \neq 4$$

§54.11(1)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -12 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{def} A = 2 \Rightarrow \text{Sätze ker } A: \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}(-3 + \frac{3}{4})$$

$$\operatorname{im} A: \begin{pmatrix} -2, 4, 2 \\ -2, 3, 3 \end{pmatrix}; \frac{3}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$\text{ke linear. } \operatorname{rg} A = 2 \neq 3.$$

SS4.22

$(x, a) = 0$ für $a \in \text{Kern } A$; $\text{Kern } A$ ist orthogonal zu $\text{Bild } A$.

SS4.35

- a) $\text{Bild } A = \text{Bild } B = T$; $\exists x: y = Ax = Bx$
 b) $\text{Kern } A = \text{Kern } B = N$; $\exists x: y = Ax = Bx$

SS5.19.1)

$\text{im } A = \text{im } B = T$; $y \in T \Rightarrow \exists x: y = Ax = Bx$
 $\text{im}(A+B) = \text{im } A$; $y' \in \text{im}(A+B) \Rightarrow \exists x': (A+B)x' = y' = Ax' + Bx'$
 $y' \in \text{im } A \Rightarrow \exists x'': Ax'' = y' = Ax' + Bx' \Rightarrow y' = 2Ax' = A(2x') \Rightarrow y' \in \text{im } A$
 $y \in \text{im } A \Rightarrow \exists x: Ax = y$; $y = (A+B)x'$
 $y = Ax' + Bx'$ Antwort

SS5.20

$\dim N = l$, $\dim V = n$, $\dim W = m$; $N \subseteq V$; $\text{Kern } A \supseteq N$, $\text{Kern } B \supseteq N$
 $\text{Kern}(A+B) \supseteq N$; $x \in N: (A+B)x = Ax + Bx = 0$

$m(n-l)$

SS5.32

$\text{rg } A = \text{rg } B = 1$; $\text{im } A = \text{im } B$; $\text{Kern } A = \text{Kern } B$
 $\Rightarrow A = \lambda B$; $Ax = y = Bx'$ $| x \in \text{Kern } A$
 $Ax = \lambda e_1$; $Bx' = \lambda e_1 \Rightarrow \dots$

SS6.1

o) $Q_{Ae}^{-1} A_{Ae} Q_{Ae} = A_e$; $e_2 = a_1 + 3a_2$
 $e_1 = 4a_2 + a_1 + e_2 = 2a_1 + 7a_2 \Rightarrow Q_{Ae} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

$Q_{Ae}^{-1} A_{Ae} \tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 2 & -1 \\ 7 & 3 & | & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_e = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$e_2 = 5b_1 + 6b_2; e_1 = b_1 + b_2 + e_2 = 6b_1 + 7b_2 \Rightarrow Q_{B \rightarrow e} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 5 & 1 & -2 \\ 7 & 6 & 2 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow B_e = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(AD)_e = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -1 \end{bmatrix};$$

$$d) B_{a,a_1} = Q_{e \rightarrow a,a_1}^{-1} B_e Q_{a,a_1 \rightarrow e}; Q_{a,a_1 \rightarrow e} = Q_{e \rightarrow a,a_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}^{-1}; \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$B_{a_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \dots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 10 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \end{array} \right]$$

56.52

$$a) \ker D = \{0\}$$

$$b) \ker D = \{0\} \quad L = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \text{Angabe } x \in \ker D \Rightarrow -\alpha_1 f_2 + \alpha_2 f_1 = 0$$

$$\begin{cases} x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \\ 0 = -\alpha_1 f_2 + \alpha_2 f_1 \end{cases} \Rightarrow x = f_1 (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 f_2$$

0 r.k. puzmonen. no d. ly.

56.61

$$AB + A + I = 0; \Rightarrow A \text{ inv. u. } A^{-1} = -I - B$$

$$A(B+I) = -I, A = (-I(B+I))^{-1}; A(-I-B) = -I(B+I)^{-1}(-I(B+I)) = -I \text{ z.B.}$$

55.19

$$Q = \{ C \in \mathcal{L}(V, W) : T \in \text{im } C \}$$

$$\text{Basis in } W = T \oplus T^\perp$$

$$n = \dim V, m = \dim W, k = \dim T; \text{ f\"ur } C \in Q$$

$$\dim Q = k \cdot n.$$

$$\begin{cases} C_{e_1} = \alpha_{11} t_1 + \dots + \alpha_{k1} t_k + 0 \cdot t_{k+1} + \dots + 0 \cdot t_m \\ C_{e_n} = \alpha_{n1} t_1 + \dots + \alpha_{kn} t_k + 0 \cdot t_{k+1} + \dots + 0 \cdot t_m \end{cases} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Knack. puz.

57.1

$$a) \lambda = 0; \forall x \neq 0 - \text{wird bewiesen}$$

$$b) \lambda = 1; x \neq 0 - \text{wird bewiesen}$$

$$c) Ax = \alpha x = \lambda x, \alpha = 1 - x - \text{wird bewiesen, gerade 0.}$$

57.5

$$\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha Ax = \lambda x \Rightarrow \alpha Ax = A(\alpha x)$$

57.7

$$a) \dots$$

$$b) (a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_0 I)x = f(\lambda)x$$

§52.10

$$f(\lambda) = \chi_{\text{op. un.}} A; \quad g(\lambda) = \chi_{\text{op. un.}} A - \lambda_0 I$$

$$f(\lambda) = |A - \lambda I|, \quad g(\lambda) = |A - \lambda_0 I - \lambda I| = |A - (\lambda_0 + \lambda) I|.$$

§52.14

$$B = Q^{-1} A Q; \quad A x = \lambda x; \quad |B - \lambda I| = |Q^{-1} A Q - \lambda I| = |Q^{-1} (A - \lambda I) Q|$$

$$= |Q^{-1}| |A - \lambda I| |Q| = |A - \lambda I|;$$

$$A = Q B Q^{-1} \Rightarrow Q B x = A Q x, \quad \cancel{Q \lambda x = A Q x} \quad A Q x = Q \lambda x$$

$$A(Qx) = \lambda(Qx)$$

§52.25(6)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & -\lambda & a_1 \\ a_2 & -a_1 & -\lambda \end{vmatrix} \ominus \begin{vmatrix} -\lambda - a_3 + a_2 & -\lambda + a_3 - a_1 & -\lambda + a_1 - a_2 \end{vmatrix}$$

$$\ominus -\lambda^3 - \lambda |a|^2 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \text{ } \lambda_{2,3} \text{ are complex conj. } \pm i|a|$$

§57.34

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

§57.41

Аналогично.

§57.51 З/р.

§57.3

$$1) Ax = 0, \quad x = ? \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0.$$

$$2) (A - \lambda_0 I)x = 0 \Rightarrow Ax = \lambda_0 x \quad \text{"0"}$$

$$3) Ax = \lambda x \Rightarrow A \frac{1}{\lambda} x = \frac{1}{\lambda} \lambda x = x, \quad \text{"0"}$$

52.6

Ug 52.10: $\lambda_{A-\lambda I} = \lambda_0 - \lambda_A$; $Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = (\lambda - \lambda)x$

52.8?

Her, $f(A)x = \lambda x \Rightarrow Ax = \lambda' x$ (параллельно); Пусть $f(\lambda) = 1$
 $A = D$

52.9

$|A - \lambda I| = 0 = |A - \lambda I| |A + \lambda I| = 0 \Rightarrow$ з.г.

52.14

Let $A = 0$; $Ax = \lambda x$; $A^{-1}A = I$ $A^{-1}Ax = x$, $A^{-1}(\lambda x) = x$, $\lambda A^{-1}x = x$
 $|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$ з.г.

52.23

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda_i = a_{ii}$, с гл.т.м. $n=1, 2$.
 Базисные векторы есть, берем $n=1, 2$.

$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$

проблемы: берем $n=3$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ контр. пример $\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & a_{22}-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda \end{bmatrix} = A - \lambda I$; $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & 1 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

52.25 (2. g. e)

2) Пусть $u_1 = u_1$; $u_2 = u_2$. Тогда $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$
 $\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$; $\det |A - \lambda I| = (1-\lambda)^{u_1} (-\lambda)^{u_2}$
 c.б. $x \neq 0$ u_1 c.б. $x \neq 0$ u_2

$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$

$f(\lambda) = (1-\lambda)^{u_1} (-\lambda)^{u_2}$; $\lambda = 1$ c.б. $x \neq 0$ u_1 ; $\lambda = -1$ c.б. $x \neq 0$ u_2

$R_x = x_1 - x_2$

c) $f(\lambda) = (-\lambda)^{m+1}$, $\lambda = 0$ c.б. $x \in M_0$ $x \neq 0$

52.30

$f(\lambda)$ - характеристический $\Rightarrow$ корень 1 корень

57.32

$$A = \begin{bmatrix} 3+i & -1 \\ 2i & 1-i \end{bmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3+i-\lambda & -1 \\ 2i & 1-i-\lambda \end{vmatrix} = (3+i-\lambda)(1-i-\lambda) + 2i = \lambda^2 + \lambda(-4) + \lambda^2(-1+i-3-\lambda) + 3+1-3i+1$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

$$\Rightarrow f(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 2i & -1-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(1+i) - 2x_2 = 0 \\ 2ix_1 - x_2(1+i) = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 \frac{2i}{1+i}, \quad x_1(2-i-2) = 0 \Rightarrow e = (1, 1+i)$$

$$\Rightarrow \text{c.b. } \alpha e, \alpha \neq 0$$

52.35

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(16-8\lambda+\lambda^2-1) - (8-2\lambda) + (2) =$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6$$

$$\lambda_1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{c.b. } \alpha(0, 1, -1), \alpha \neq 0$$

$$\lambda_2: \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{c.b. } \alpha(3, 4, 2), \alpha \neq 0$$

57.37

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = (-\lambda)(\lambda+2)^2$$

$$= (-\lambda)(\lambda+2)^2, \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{c.b. } \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, 1, 2), \alpha, \beta \neq 0$$

52.45

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^5 \Rightarrow \lambda = 3;$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{L.B.} : \alpha(1, 0, 0, -1) + \beta(0, 0, 1, 0) \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

52.50

$$Ax = \lambda_1 x, \quad Ay = \lambda_2 y, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2; \quad \ominus A(\alpha x + \beta y) = \lambda'(\alpha x + \beta y) \\ \ominus \alpha Ax + \beta Ay = \alpha \lambda_1 x + \beta \lambda_2 y, \quad \forall \alpha, \beta. \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \alpha \lambda_1 x + \beta \lambda_2 x = \lambda'(\alpha x + \beta y) \\ \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ или } \beta = 0$$

Клр.

52.51

$$A = \alpha I, \quad Ax = \alpha Ix = \alpha x, \quad x \neq 0 \quad \cancel{Ax = \lambda_1 x \quad \forall x} \quad Ax = \lambda_1 x \quad Ay = \lambda_2 y, \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow x, y - \text{н.к.з.}$$

$$A(x+y) = \lambda(x+y) = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \quad x(\lambda - \lambda_1) = y(\lambda - \lambda_2) \quad \forall x, y - \text{н.к.з.} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda = \lambda_1, \Rightarrow \lambda = \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \text{скаляр. оператор. } Ax = \lambda x \quad \forall x \in V \Rightarrow A = \lambda I.$$

52.52a)

$$A(t) = t f'(t), \quad e_0 = 1, A e_0 = 0 \\ e_1 = t, A e_1 = t \\ \vdots \\ e_n = t^n, A e_n = n \cdot t^{n-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, 1, 2, \dots, n. \\ \lambda = 0 \Rightarrow \text{свойств: } 1; \\ \dots$$

$$\begin{bmatrix} t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}$$

58.1

$$V = U_1 \oplus U_2 \Rightarrow x \in V : x = x_1 + x_2, \quad P x = x_1 \\ \text{н.к.з. } U_1, \text{ н.к.з. } U_2$$

$$\delta) R x = x_1 - x_2 \Rightarrow R_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

§58.28)

$$L_1: 3x+2y=0, f_1(-2,3)$$

$$L_2: x-y=0, g_1(1,1)$$

§58.3)

$e_1, \dots, e_n$ - базис из левых векторов $e_1, \dots, e_n \in \ker A$

$$\operatorname{im} A = \mathcal{L}(Ae_1, \dots, Ae_n) = \mathcal{L}(Ae_{n+1}, \dots, Ae_n) = \mathcal{L}(e_{n+1}, \dots, e_n)$$

$$\exists) x \in (\ker A \cap \operatorname{im} A) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=n+1}^n \beta_i e_i \quad Ax = \beta_{n+1} e_{n+1} + \dots + \beta_n e_n = 0$$

$$\Rightarrow x = 0.$$

$$b) \operatorname{rg} A + \dim A = n \text{ и регуляр. матрица}$$

§58.29

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1-\lambda \\ 3-\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} = 1 + \lambda + \lambda^2 \text{ имеет 2 корня}$$

§58.30

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \operatorname{rg} A = 1$$

§58.49

§58.66

$$A, D - \text{н.с.р.}, A = T^{-1} \Lambda T, D = P^{-1} \Lambda P \Rightarrow A = \underbrace{(T^{-1}P)}_{=Q^{-1}} D \underbrace{(P^{-1}T)}_{=Q}$$

§58.50

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -\lambda \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-\sqrt{6})(\lambda+\sqrt{6})$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = (1, 0, 0, 2);$$

$$\lambda = -2: x_2 = (-1, 0, 0, 2);$$

$$\lambda = -\sqrt{6}: x_4 = (0, -\sqrt{6}, 3, 0)$$

$$\lambda = \sqrt{6}: x_3 = (0, \sqrt{6}, 3, 0);$$

2P

57.73(b)

$$Af(t) = f(t+a), \quad a \neq 0; \quad a \in \mathbb{R}$$

$$e_0 = 1, \\ e_1 = t, \\ \vdots \\ e_n = t^n$$

$$Ae_1 = 1+a \\ Ae_2 = (a+t) \\ \vdots \\ Ae_n = (t+a)^n$$

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \text{ob. } f(t) = \alpha, \quad \alpha \neq 0.$$

57.77

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I^2 A = A$$

$$I A = \lambda A \Rightarrow I A^2 = \lambda^2 A = A \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1.$$

58.2(a,b)

$$a) U = U_1 \oplus U_2; \quad U_1: x-2y=0 \quad f_1(2,1) \\ U_2: 3x-y=0 \quad g_2(1,3)$$

$$b) U = U_1 \oplus U_2; \quad U_1: x-3y=0 \quad \text{u.} \quad f_1(3,1,0), f_2(0,0,1) \\ U_2: \begin{cases} x+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \quad g_1(-1,3,1)$$

58.36

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1)$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i.$$

a) ues
b) ges

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = ((\lambda - i)(\lambda + i))^2 = (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2$$

$$B = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rg } B = 2, \text{ andere zwei } i.$$

58.51

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 (\lambda^2 - 2) = \lambda^2 (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}).$$

2. x1. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0.$

458.52

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2, \lambda_1=1, \lambda_2=2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} f_1 &= (1, 0, 0, 0) \\ f_2 &= (0, 1, -\frac{1}{2}, 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} g_1 &= (1, 1, 0, 0) \\ g_2 &= (1, 0, 2, -1) \end{aligned}$$

$$\Lambda = \text{diag}(1, 1, 2, 2).$$

\$59.64

7.к. λ и $\bar{\lambda}$ - глв. корни кор. мн. $\Rightarrow \lambda' \in \mathbb{R} \Rightarrow$ все λ - разн.
 $\Rightarrow$ кор-и имеют структуру.

2587

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ a & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ a & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)((1-\lambda)(1-\lambda) + 1 - a) =$$

$$-(-\lambda)(2-3\lambda+\lambda^2-1-a) = (-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+1-a) = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 - a = 0, \Delta = 9 - 4 + 4a = 5 + 4a \geq 0 \Rightarrow a \geq -\frac{5}{4};$$

$$a) \text{ f\"ur } a > -\frac{5}{4}, \quad b) \text{ f\"ur } a \neq 5/4 \quad c) \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5+4a}}{2} \quad d) 5+4a = k^2, k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow a = (k^2 - 5)/4, k \in \mathbb{N}$$

K. 105.

59.2

c) in A , $\ker A$

c) in A , $\ker A$
 d) $\ker A$ ist ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. $W_A = \{x \mid Ax = 0x\} = \{x \mid Ax = 0\}$. $Ax = 0 \Rightarrow x \in W_A$

6) $z(x_1, x_2)$, $x_1 \in A$, $x_2 \in B$, $Ax_i = \lambda_i x_i$

$$2) M \sin A$$

53.1216

$$[A - dI] = (2-d)(1-d)(-1-d) \Rightarrow \text{урав. с корнями}$$

$\lambda = 2 \Rightarrow e_1 = (0, 1, 1)$
 $\lambda = 1 \Rightarrow e_2 = (-1, 1, 1)$

from $\lambda = -1 \Rightarrow e_3 = (-1, 1, 2)$

линейно. отриц.-ба: $\angle(e_i), i=1, \dots, 3$
 $\angle(e_i, e_j), e_i \neq e_j, i, j=1, \dots, 3$

§ 59.25

$$(A - \lambda_0 I)x = Ax - \lambda_0 x$$

$\cap_{L-\text{инв. стр. } A - \lambda_0 I}$ $\cap_{L_1} \cap_{L_2} \cap_{L_3}$ $\cap_{L_4} \cap_{L_5} \cap_{L_6}$

$$(A - \lambda_0 I)x + \lambda_0 x = Ax, \quad \text{т.к. } Ax \in L$$

$$Ax - \lambda_0 x \in L$$

§ 59.26

$$\text{rg}(A - \lambda_0 I) \leq n-1 \Leftrightarrow \exists L: \text{im}(A - \lambda_0 I) \subset L$$

§ 59.27

линейно. отриц.-ба.

§ 59.32(б)

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 10 & -10 \\ -7 & 4-\lambda & -4 \\ -2 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -3-\lambda & 10 & 0 \\ -7 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 29)$$

$\Delta/4 < 0$.

$$(A - \lambda_0 I) = A \begin{pmatrix} -3 & 10 & -10 \\ -7 & 4 & -4 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \angle(e_1, e_2) - \text{линейно. отриц.-ба.}$$

§ 59.43

$AB = BA$, L - инв. стр. $W_\lambda \subset V$, W_λ - инв. A , $Ax = \lambda x$

$$ADx = BAx = B\lambda x$$

$$A(Bx) = \lambda(Bx) \Leftrightarrow Bx \in W_\lambda$$

§ 59.4

L - инв. A ; $|A| \neq 0$ $A^{-1}x = z, \quad x = Az$ $L \Rightarrow z \in L$

$Ax \in L$; $Ax = y$

§ 59.11(б)

$Kx = x_1 x_2 x_3 = x_2$; $L = L_1 \oplus L_2$ все отриц. базис $L = M_1 \oplus M_2$,
 M_1, M_2 - отриц.-ба L инв. стр. L инв. стр.

§5.11

→ любой вектор удовлетворяет $\Rightarrow A$ -скалярному.

§5.12

$A \neq I, A \neq 0, A^2 = A, A \in P$ на $\text{im } A$ на $\text{ker } A$

$$Ax = \lambda x, A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda x \Rightarrow Ax = 0 \text{ или } \lambda = 1$$

или $Ax \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1$

§5.12(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3+\lambda) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$\lambda_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_1 = (-2, 1)$$

$$\lambda_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_2 = (-1, 1)$$

Определить $x_1(e_1), x_2(e_2), \dots$

§5.28

Рассмотрим уравнение на K -алгебре $n \times n$ матрицы $A: A'$ где n по заданию §5.27.

§5.32(b)

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot ((1-\lambda)(3-\lambda) + 2) - 2((1-\lambda)(3-\lambda) + 4) =$$

$$= -(1-\lambda)^3 - 2\lambda(1+3) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 1-\lambda \\ -3 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \left(- \underbrace{\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}_{1+\lambda-2} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}}_{\lambda(1+\lambda)} \right) = (1-\lambda) (-\lambda + 1 + \lambda^2 + \lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 1)$$

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = +i$$

$$\lambda_3 = -i$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{L}(e_1, e_2)$$

§59.45

$$AB=BA, \quad A \text{ и } B - \text{нормальны е.р.}; \quad A_1 = A P^{-1} A P$$

$$A_2 = Q^{-1} B Q$$

§59.42

$$Ax = \lambda x, \quad ABx = \lambda Bx \text{ из } \underline{\S 59.45}; \quad AB=BA \quad \exists \lambda: Ax = \lambda x$$

$$Bx = \lambda' x;$$

$$A(Bx) = B(Ax) = \lambda(Bx); \quad x \in W_\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Bx \in W_\lambda$$

$$\Rightarrow \exists \text{ c.5.46. берем,}$$

$$\text{т.е.}$$

Нормальность

60.1

$$(A - \lambda I)^q x = 0, \quad x \neq 0 \Rightarrow \text{из } g.$$

60.3

$$B^{q_1} f_1 = 0 \quad B^{q_2} f_2 = 0 \quad q_1, q_2 \quad f = f_1 + \alpha f_2 \quad B^k f = B^k (f_1 + \alpha f_2) = 0, \quad k \leq q$$

$$B^{q_1-1} f_1 \neq 0 \quad B^{q_2-1} f_2 \neq 0 \quad B^k f = 0 \quad B^q f = B^{q_1} f_1 + \alpha B^{q_1} f_2 = 0$$

$$B = A - \lambda I$$

$$B^{q_1-1} f = B^{q_1-1} f_1 + \alpha B^{q_1-1} f_2 = 0 \quad B^{q_1-1} f_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{из } g.$$

60.12

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -3 & -\lambda & 2 \\ -1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3-\lambda \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank} = 2$$

при $\lambda=1$: $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0 \ -1 \ 1, \dots \text{ rank} = 2$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank} = 1 \Rightarrow \underline{e_2 = (1, 0, 1)}, \underline{e_3 = (1, 1, 1)}$$

Лек. 21

a) $(A - \lambda I)^n x = 0$, при $\exists e_1, \dots, e_n$ $\text{rank}(e_i) < n$

$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$; $(A - \lambda I)^{n-1} (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = 0 \neq (A - \lambda I)^{n-1} x \neq 0$

b) $B^n f = 0$, $B^{n-1} f \neq 0$

$B(A - \lambda I)^{n-1} f =$

$B^{n-1} f \rightarrow B f, f$

матрица $\begin{matrix} & 1 & \dots & n-1 & n \\ e_1 & \dots & \dots & \dots & e_n \end{matrix}$

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$$

$B e_1 = 0$
 $B e_2 = e_1$
 $\dots$
 $B e_n = e_{n-1}$

$(A - \lambda I) e_1 = 0$
 $A e_1 = \lambda e_1$
 $A e_2 = e_1 + \lambda e_2$
 $\dots$
 $A e_n = e_{n-1} + \lambda e_n$

каскад. жерген. $\Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Лек. 29

матрица жерген. жерген:

$$(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)^n$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank} = n-1 \Rightarrow$ дин каскад. жерген. $\Rightarrow$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

дигер жерген. жерген.

Лек. 27

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^4$$

$\lambda = 2$
 $n = 4$

$N_1:$

$$\ker(A-2I), \quad A-2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg } B = 3 \\ \dim N_1 = 1.$$

$$N_2: B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim N_2 = 2 \quad N_3: B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim N_3 = 3$$

$$N_4: B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rg } B^4 = 0 \Rightarrow \dim N_4 = 4$$

$$N_4 = N_3 \oplus \overline{N_3}, \quad N_3 = N_2 \oplus \overline{N_2}, \quad N_2 = N_1 \oplus \overline{N_1}$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\overline{N_3}$	$\{ (1, 0, 0, 0) \}$	e_4
$\overline{N_2}$	$\{ (1, 0, 0, -1) \}$	e_3
$\overline{N_1}$	$\{ (1, 0, -1, 0) \}$	e_2
N_1	$\{ (1, -1, 0, 0) \}$	e_1

2.6.20 (a, d)

1) $B^q f = 0, B^{q-1} f \neq 0; B^{q-1}(Bf) = 0, B^{q-2}(Bf) = B^{q-1} f \neq 0$ z.B.; $B = A - \lambda I$
 $\forall j \neq i, B^q(A - \lambda_j I) f = 0, B^{q-1}(A - \lambda_j I) f = (A - \lambda_j I) B^{q-1} f \neq 0$.

2.6.20

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -2-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 4 & -6 \\ -1-\lambda & -2-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -2-\lambda & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)(-4+\lambda^2+3) =$$

$$= (-1-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2-1)(\lambda+1) = (-1-\lambda)^2(1-\lambda)^2$$

$$\lambda = 1: A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 & 12 \\ -2 & 6 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_1 = (3, 1, 0, 0) \\ e_2 = (0, 0, 1, 1)$$

$$\lambda=2: (A-\lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 12 & -12 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} e_1 = (1, 1, 0, 0) \\ e_2 = (0, 0, 1, 1) \end{matrix}$$

Order $\mathcal{L}(e_1, e_2); \mathcal{L}(e_1, e_2)$

Ex 60.24

$$f, Bf, \dots, B^{n-1}f$$

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

$$Be_1 = e_2$$

$$Be_2 = Be_3$$

$$\vdots$$

$$Be_n = 0$$

$$Ae_1 = e_2 + \lambda_0 e_1$$

$$\Rightarrow Ae_2 = e_3 + \lambda_0 e_2$$

$$Ae_n = \lambda_0 e_n$$

$$[A]_e = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & & 0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

Ex 60.25

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3;$$

$$N_1: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{rg } N_1 = 2; \dim N_1 = 1$$

$$N_2: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dim N_2 = 2; \quad W_3: \dim N_3 = 3.$$

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 = N_4; \quad N_2 = N_1 \oplus \bar{N}_1, \quad N_3 = N_2 \oplus \bar{N}_2, \quad \dots$$

$\bar{N}_i$	$B^i f$	
$\bar{N}_2$	$f = (0, 0, 1)$	e_3
$\bar{N}_1$	Bf	e_2
N_1	$B^2 f$	e_1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = N$$

$$Bf = (0, 0, 1).$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ex. 32

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1} \quad f(\lambda) = (1-\lambda)^n \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Ex. 36

$$D \in M_n; e_0 = 1, e_1 = t, \dots, e_n = t^n \Rightarrow [D]_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda = 0; f(\lambda) = (-\lambda)^n \Rightarrow J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Kan. bases:

$$f_n = t^n, f_{n-1} = nt^{n-1}, f_{n-2} = n(n-1)t^{n-2}, \dots, f_0 = n!$$

Ex. 95

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 (2-\lambda-2) = (-1)^4$$

two eigen. values: $N_1: \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \dim N_1 = 2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim N_2 = 4 \Rightarrow N_2 = N_1 \oplus \overline{N_1}$$

$\overline{N_1} | e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$

$W_1 | e_1 = (1, 1, 1, 3, -5); e_2 = (0, 1, 0, 0)$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

44

60.46

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (4 times)}$$

$$N_1: \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \dim N_1 = 2 \quad N_2: \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \dim N_2 = 0$$

$$0 \subset N_1 \subset N_2 = N_3 = K_A;$$

$$N_2 = N_1 \oplus \overline{N_1},$$

$$\begin{array}{c|c|c} \overline{N_1} & f_1(0,1,0,0) & f_2(1,0,0,0) \\ \hline N_1 & f_1(1,0,0,1) & f_2(0,2,4,0) \end{array}$$

$e_1 \qquad e_3$

$$A_e = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

60.55

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^4;$$

$$N_1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim N_1 = 3.$$

$$N_2 = N \oplus \overline{N_1}$$

$4 \quad 3 \quad 1$

$$N_2: \dim N_2 = 4.$$

$$\begin{array}{c|c|c} \overline{N_1} & f_1(1,0,0,0) & f_2(1,0,0,0) \\ \hline N_1 & f_1(1,1,1,1) & f_2(1,0,1,0) \end{array}$$

$e_1 \qquad e_3$

$$\begin{array}{c|c} (0,1,1,0) & \\ \hline \end{array}$$

e_4

$$[A]_B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

60.74

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \lambda-1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4.$$

$$N_1: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \dim N_1 = 2$$

$$N_2: \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \dim N_2 = 3, \quad N_3: \Lambda^3 = 0_{4 \times 4}$$

$$e \in N_1 \subset N_2 \subset N_3 = N_4 = K^4$$

$$N_3 = N_2 \oplus N_1$$

$$N_2 = N_1 \oplus N_1$$

N_2	$(1, 0, 0, 0)$	e_3
N_1	$(0, 1, -1, 0)$	e_1
N_1	$(-2, 2, 2, 2)$	e_2

$$[A]_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sub 74

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-4\lambda + \lambda^2 + 4) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$$

$$\lambda=1: B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} e_1 = (0, 0, 1)$$

$$\lambda=2: N_1: \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$N_2 = N_1 \oplus N_1$$

$$N_2: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim N_2 = 2$$

$$\sim \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \dim N_1 = 1$$

N_1	$(0, 1, 1)$	e_3
N_1	$(1, 2, 0)$	e_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

§ 60.69

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2 (\lambda^2)$$

$$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = 0$$

kr. 2 kr. 2

$$N_1: \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{bmatrix} \dim N_1 = 1$$

$$N_2: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dim N_2 = 2$$

$$0 \in N_1 \in N_2 \in N_3 = N_4$$

$$\overline{N_1} \mid f = (0, 4, -6) e_2$$

$$N_1 \mid B f = (4, 2, 0, 0) e_1$$

$$\lambda = -1:$$

$$N_1: \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_3 = (0, 0, 1, 0) \\ e_4 = (0, 0, 0, 1) \Rightarrow [A]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\dim N_1 = 2$

§ 60.111

...

2/p

§ 60.52

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)^2 (1-\lambda+2) = (3-\lambda)^3$$

$$\Rightarrow N_1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim N_1 = 2$$

$$N_2: [\emptyset] \Rightarrow \dim N_2 = 0 \quad \Rightarrow N_2 = N_1 \oplus \overline{N_1}$$

$$[A]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{N_1} \mid f = (1, 0, 0) e_2$$

$$N_1 \mid B f = (1, -2, 1) e_1 \quad e = (1, 0, 1) e_3$$

Ex 0.59

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5-\lambda & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)((5-\lambda)(-1-\lambda)+9) + (5-\lambda)(-1-\lambda)+9$$

$$= ((3-\lambda)(1-\lambda)+1) \left(\frac{-5+9}{4} - 4\lambda + \lambda^2 \right) = (\lambda-2)^2 \cdot (\lambda-2)^2 = (\lambda-2)^4$$

$$N_1: \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim N_1 = 2; \quad N_2: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim N_2 = 4.$$

$$\overline{N_1} \left| \begin{array}{c} e_2 \\ f_1(1,0,0,0) \\ f_2(0,1,0,0) \end{array} \right| \quad \overline{N_2} \left| \begin{array}{c} e_4 \\ Bf_1(1,1,3,4) \\ Bf_2(-1,-1,0,-1) \end{array} \right|$$

$$N_1 \left| \begin{array}{c} e_1 \\ Bf_1(1,1,3,4) \\ Bf_2(-1,-1,0,-1) \end{array} \right|$$

$$[A] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Ex 0.61

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 15-\lambda & -6 & -6 \\ 18 & -12-\lambda & -3 \\ 18 & -9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -6 & -6 \\ 1 & -12-\lambda & -3 \\ 1 & -9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -6-\lambda & 3 \\ 1 & -3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)((-6-\lambda)(-\lambda)+9) = (3-\lambda)(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = (3-\lambda)(\lambda+3)^2$$

$\lambda = -3$

$$N_1: \begin{bmatrix} 12 & -6 & -6 \\ 18 & -15 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 6 & -5 & -1 \\ 6 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim N_1 = 1$$

$$e_1 = (1, 1, 1);$$

$\lambda = -3$

$$N_1: \begin{bmatrix} 18 & -6 & -6 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim N_1 = 1; \quad N_2: \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -3 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$N_2: \begin{bmatrix} 12 & 0 & -8 \\ 12 & 0 & -8 \\ 12 & 0 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim N_2 = 2$$

$N_2 = N_1 \oplus N_1$

$\lambda = -3$

$$[A]_e = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\overline{N_1} \left| \begin{array}{c} e_2 \\ f_1(1,0,3) \\ Bf_1(0,0,9) \end{array} \right|$$

e_2

26.6

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-5-\lambda) \left(\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \right) - 4 \cdot (-4)$$

$$= ((3-\lambda)(-5-\lambda) + 16) ((3-\lambda)(-1-\lambda) + 4) = (\lambda^2 + 2\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2;$$

$\lambda = 1$

$$N_1: \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \dim N_1 = 1 \quad N_1: 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$N_2: 4 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dim N_2 = 2$$

$$N_2 = N_1 \oplus \bar{N}_1$$

$$\begin{array}{c|c} N_1 & f(2, 2, 0, 0) \\ \hline \bar{N}_1 & Bf(2, 2, 2, 2) \\ & e_1 \end{array}$$

$$4 \cdot \begin{bmatrix} -4 & 5 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1$

$$N_1: \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \dim N_1 = 2$$

$$\begin{array}{c|c} \cancel{N_1} & f(1, 0, 0, 0) \\ \hline \cancel{N_1} & Bf(4, 4, 0, 0) \\ & e_3 \end{array}$$

$$[A]_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

$$N_2: \left(2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^2 =$$

$$= 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim N_2 = 2.$$

26.70

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & 3 & 15 \\ -1 & 1-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -3-\lambda & 15 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= ((-3-\lambda)(2-\lambda) + 6) \cdot ((-3-\lambda)(1-\lambda) + 4) = (\lambda^2 + \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 1)^2 = \lambda(\lambda + 1)^3.$$

$$\underline{\lambda=0}: N_1: \begin{bmatrix} -3 & 4 & 3 & 15 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \dim N_1 = 1 \quad e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda=-1}: N_2: \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 & 15 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \dim N_2 = 1$$

$$N_2: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 & 26 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\dim N_2 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_3: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 & 24 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = N_2 \oplus \overline{N_2},$$

$$N_2 = N_1 \oplus \overline{N_1}$$

$$\begin{array}{c|c} \overline{N_2} & + (0, 0, -2) e_4 \\ \hline N_1 & N_1 \oplus (-2, 1, -10, 0) e_1 \\ \hline N_1 & N_1^2 \oplus (2, 1, 0, 0) e_2 \end{array} \dim N_3 = 3$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

60.76

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -3-\lambda & -3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(A-1)(2-\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3-\lambda & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -\lambda-1 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 0 & \lambda+1 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot (3-\lambda)$$

$$= (\lambda+1)(5(\lambda+1) +$$

$$-\lambda^2 + \lambda + 2) \oplus$$

$$\oplus (\lambda+1)(-\lambda^2 + 6\lambda + 7)$$

$$-3 \cdot (\lambda+1)^2 + 2 \cdot (\lambda+1)^2$$

$$= -5 \cdot (\lambda+1)^2$$

$$(-\lambda-1) \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 1+\lambda \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (\lambda+1) \begin{vmatrix} 0 & -\lambda-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 1 - \lambda$$

$$= (\lambda+1)^2 - (\lambda+1)$$

$$= (\lambda+1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$$

$$= -\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$$

$$|A - \lambda I| = (\lambda+1)(\lambda+1 + (-2-\lambda)(-\lambda^2 + 6\lambda + 7))$$

$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 - 18\lambda - 13 - (\lambda+1)(\lambda^2 - 5\lambda - 13)$$

$$= (\lambda+1)^2(\lambda^2 - 5\lambda - 13)$$

SG0.95

a) $\lambda' = \lambda - \lambda_0$;

b) $P^{-1}AP = J$; $AA^{-1} = I$, $A^{-1}A = I$

$\lambda' = \frac{1}{\lambda_0}$

SG0.110

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 5 \\ -12 & 8-\lambda & 20 \\ 3 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & 8-\lambda & 20 \\ 3 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 \cdot (-8 - \lambda + \underbrace{16}_{32}) = (-\lambda)^2 \cdot (24 - \lambda)$$

$\lambda = 0$:

$$N_1: \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -12 & 8 & 20 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim N_1 = 2$$

$\lambda = 24$

$$N_1: \begin{bmatrix} -27 & 2 & 5 \\ -12 & -16 & 20 \\ 3 & -2 & -29 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 29 \\ 0 & -24 & -96 \\ 0 & -16 & -180 - 81 + 5 \end{bmatrix} \dim N_2 = 1$$

$$\{A\} = \begin{bmatrix} 24 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 59-\lambda & -63 & 52 \\ -147 & 159-\lambda & -132 \\ -244 & 263 & -219-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 218\lambda - 120$$

$$|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 59-\lambda & -63 & 52 \\ -147 & 159-\lambda & -132 \\ -244 & 263 & -219-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3$$

16 мая 2019.

Самосопряжённый оператор

$$A \in \mathcal{L}(V, W); \quad (Ax, y) = (x, A^*y); \quad \forall A \quad \exists A^*: W \rightarrow V$$

$$A \rightarrow A^*$$

$$A^* \leftarrow A^*$$

свойство
линейного
оператора

Лемма 1.1

V, W - линейные (евкл.) н.р.-к. ; $A: V \rightarrow W$
 $B: V \rightarrow W$

Дока: $\forall x \in V, \forall y \in W: (Ax, y) = (Bx, y) \Rightarrow A \equiv B$ самосопряжённый.
 $(A-B)x, y = 0 \Rightarrow (A-B)x = 0 \Rightarrow Ax = Bx \quad \forall x \in V$

Лемма 1.2

$$(Ae_i, f_j) = (e_i, Bf_j), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m} \Rightarrow A^* = B;$$

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j$$

$$(Ax, y) = (A \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^m \beta_j f_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (Ae_i, f_j) \stackrel{\text{Лемма 1.1}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (e_i, Bf_j) = (x, By)$$

$$= (x, By) \stackrel{\text{Лемма 1.1}}{=} (x, A^*y) \Rightarrow A^* = B.$$

Лемма 1.25

$$Ax = [x, a]; \quad ([x, a], y) = (x, [a, y]), \quad A^*x = [a, x];$$

Лемма 1.26(a)

$$f(x) = (x, h), \quad (f(x), \alpha) = \overline{\alpha}(x, h) = (x, \alpha h) \Rightarrow f^*(\alpha) = \alpha h.$$

Лемма 1.34

$$f_1 = (1, 0), \quad f_2 = (1, 1); \quad A_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_f = Q_{\text{ort}}^{-1} A_e Q_{\text{ort}}$$

$$Q_{\text{ort}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad Q_{\text{ort}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -1 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim Q_{\text{ort}}^{-1}$$

$$A_e = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_e^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_f = Q_{e \rightarrow f}^{-1} A_e Q_{e \rightarrow f}$$

Ex 39(a)

$$BA^{-1} : \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I \\ BA^{-1} \end{bmatrix}$$

Ex 51(a)

$$a) \ker A^*A = \ker A$$

$\ker A = \ker A^*A = (\ker A)^{\perp}$; $\text{Im } A \subseteq \ker A^*A$ $\Rightarrow x \in \ker A \Rightarrow x \in \ker A^*A$
 $x \in \ker A^*A \Rightarrow A^*Ax = 0 \Rightarrow (Ax) \in \ker A^*$
 $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker A$.

Ex 41(a)

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

Ex 41(a); $(Df, g) = (f, D^*g)$; $D^*g = 0$ $\Rightarrow$ $D^*g = 0$

$$1. f_1 = a_0; \|f_1\| = \sqrt{(f_1, f_1)} = \sqrt{3}a_0$$

$$g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2. f_2 = a_0 + a_1 t, (f_2, g_1) = 0 \Rightarrow (a_0 - a_1 + a_0 + a_0 + a_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$(f_2, f_2) = a_1^2 + a_1^2 = 2a_1^2$$

$$g_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$3. f_3 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$(f_3, g_1) = 0, (a_0 - a_1 + a_2 + a_0 + a_1 + a_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3a_0 + 2a_2 = 0$$

$$(f_3, g_2) = 0, (a_0 - a_1 + a_2) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (a_0 + a_1 + a_2) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = a_1 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a_1 = 0$$

$$(f_3, f_3) = 1 \Rightarrow (a_0 - a_1 + a_2)^2 + a_0^2 + (a_0 + a_1 + a_2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow g_3 = f_3; \begin{pmatrix} a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; g_2 = \frac{t}{\sqrt{2}}; g_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} t^2$$

$$A_{g1} = 0, A_{g2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}i, A_{g3} = -\sqrt{2} \cdot i$$

$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_g^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix};$$

$$Q_{g \rightarrow f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$D_e^* = Q_{g \rightarrow f} D_g^* Q_{g \rightarrow f}^{-1} \Rightarrow D_e^* = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

З/ф
6.1.3

$$a) A(x e_1 + \dots + x_n e_n) = \sum_{i=1}^n x_i f_i, \quad x_i = (x, e_i);$$

$$b) \forall y \in W, (x, A^* y) = \sum_{i=1}^n (y, f_i) e_i, \quad A^* y = \sum_{i=1}^n (y, f_i) e_i, \quad \forall y \in W; \quad (x, A^* y) = (x, \sum_{j=1}^n (y, f_j) e_j) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot (y, f_i); \quad (A x, y) = (\sum_{i=1}^n x_i f_i, y) = \sum_{i=1}^n x_i (f_i, y) \quad \text{т.е.}$$

6.1.4

$$A = \sum_{i=1}^n (A e_i, e_i) e_i \in$$

$$\in a_{11} + \dots + a_{nn} \text{ т.е.}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

6.1.24

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

- обратный в
матричном
отношении.

6.1.27a)

$$a) A x = B x; \quad \text{без } \mathbb{R}^n;$$

$$[A] = B \Rightarrow A^* = B^H = B^T.$$

6.1.35

$$Q_{e \rightarrow f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_f = Q_{e \rightarrow f}^{-1} A_e Q_{e \rightarrow f}; \quad A_e = Q_{e \rightarrow f} A_f Q_{e \rightarrow f}^{-1}$$

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix};$$

$$A_e^* = A_e^T;$$

$$A_f^* = Q_{e \rightarrow f}^{-1} A_e^* Q_{e \rightarrow f}$$

$$A_f^* = Q_{e \rightarrow f}^{-1} (Q_{e \rightarrow f}^T)^T \cdot A_f^T \cdot Q_{e \rightarrow f}^T \cdot Q_{e \rightarrow f};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow Q_{\text{ext}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}; A_f^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & -8 \\ -4 & 3 & 3 \\ -8 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -20 & -12 & 12 \\ 8 & 12 & 4 \\ 24 & 4 & -28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -20 & -40 & -44 \\ 24 & 32 & 32 \\ 4 & 32 & 36 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -144 & -148 & -60 \\ 120 & 120 & 56 \\ 104 & 108 & 36 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{bmatrix}$$

61.39(8)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad A_e = BA^{-1}$$

$$(A_e: \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -2 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{6\frac{1}{3}}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} \end{array} \right] \Rightarrow)$$

$$A_e^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{15}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Orbit: } \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

61.40(2,5)

$$(f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt, \quad a = -1, b = 1.$$

$$a) \text{ Basis: } 1, t, t^2; \quad 1. \frac{1}{\sqrt{2}} = a_0; \quad t^2 = 2a_2 \Rightarrow g_1 = \frac{1}{2};$$

$$2. f_2 = a_0 + a_1 t, \quad (f_2, g_1) = 0; \quad \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t) \cdot \frac{1}{2} dt = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} a_0 \cdot 2 + \frac{1}{2} a_1 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = 0$$

$$\sqrt{f_2, f_2} = \sqrt{\int_{-1}^1 (a_1 t)^2 dt} = \sqrt{a_1^2 \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1} = a_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow g_2 = \frac{a_1 t}{a_1 \sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot t$$

$$f_3 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2; \quad (f_3, f_2) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) t dt = 0 \quad \textcircled{e}$$

$$(f_3, g_1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) dt = 0$$

$$\frac{1}{2} (2a_0 + \frac{2}{3} a_2) = 0 \Rightarrow a_0 + \frac{1}{3} a_2 = 0$$

$$a_0 = -\frac{1}{3} a_2$$

$$\textcircled{e} \frac{2}{3} a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$(f_3, f_3) = \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)^2 dt = \int_{-1}^1 (-\frac{1}{3} a_2 + a_2 t^2)^2 dt \quad \textcircled{e}$$

$$\textcircled{e} a_2^2 \int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt = a_2^2 \int_{-1}^1 (t^4 - \frac{2}{3} t^2 + \frac{1}{9}) dt = \frac{8}{15} \cdot a_2^2 \Rightarrow g_3 = \frac{-\frac{1}{3} a_2 + a_2 t^2}{\frac{2}{\sqrt{15}} a_2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} t^2; \quad g_1 = \frac{1}{2}; \quad g_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot t; \quad g_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} t^2$$

$$A_{e \rightarrow g} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}; \quad A_g = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_g^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_g^* = Q_{e \rightarrow g}^{-1} A_e^* Q_{e \rightarrow g} \Rightarrow A_e^* = Q_{e \rightarrow g} A_g^* Q_{e \rightarrow g}^{-1}, \quad A_g^* = A_g^T$$

$$A_g^* Q_{e \rightarrow g}^{-1}: \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_e^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \end{bmatrix} \in$$

$$\textcircled{e} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{bmatrix}; \quad \textcircled{e} 1, t, 3t^2 - 1$$

$$Q_{e \rightarrow e'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{e'}^* = Q_{e \rightarrow e'}^{-1} A_e^* Q_{e \rightarrow e'} \Rightarrow Q_{e \rightarrow e'}^{-1} A_e^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 12 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 15 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{e'}^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

5.1(c)

$$\textcircled{e} \text{im } A^* A = \text{im } A^*; \quad \text{RyR } y = A^* A x, \text{ then } y = A^* (A x) \Rightarrow y \in \text{im } A^*$$

$$\text{im } A^* = (\ker A)^\perp$$

$$\ker A^* A$$

$$\text{RyR } y = A^* x, \text{ then } x' \in \ker A \Rightarrow (x', y) = 0 =$$

$$= (x', A^* x)$$

$$\delta) \ker A = \ker A^*A; \quad \text{im } A^*A = \text{im } A$$

$$\ker A = (\text{im } A^*)^\perp \Rightarrow \ker A^*A = (\text{im } A^*A)^\perp$$

$$(\text{im } A^*)^\perp = (\text{im } A^*A)^\perp$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{im } A^*A)^\perp \oplus \text{im } A^*A = V \\ (\text{im } A^*A)^\perp \oplus \text{im } A^*A = V \end{array} \right.$$

Up-Im property:

$U \subset A \subset U$ up-Pr. A-kerne.

аксиомы $\Leftrightarrow$ $\exists$ базис ортогональный базису.

§2.5

$$Ax = [x, a]; \quad (Ax, y) = (x, A^*y); \quad A^* = -A$$

§2.7

$$x \in \ker A \vee x \in \ker A^* \Rightarrow Ax = 0; \quad (Ax, y) = (x, A^*y) = 0$$

$$(Ax, Ax) = (x, A^*Ax) = (x, A^*Ax) = (A^*x, A^*x) = 0 \Rightarrow A^*x = 0 \Rightarrow x \in \ker A^*$$

§2.20

$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow P_{\text{ker}}.$$

$$L_1: e_1, \dots, e_k \text{ - орт. базис}$$

$$\Rightarrow P_{\text{ker}} \text{ (3 орт.)}$$

$$L_2: e_{k+1}, \dots, e_n \text{ - орт. базис.}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow P_{\text{ker}}$$

$$P \lambda: 1 \quad e_1 \dots e_k \text{ орт.}$$

$$\lambda: 0 \quad e_{k+1} \dots e_n \text{ орт. } \perp$$

§2.26

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad A^H = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad A^H A = A A^H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = (1-\lambda-i)(1-\lambda+i)$$

$$\lambda_1 = 1-i; \quad A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} i & i \\ i & i \end{bmatrix} \quad x_1 = (1, -1) \quad e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} i & i \\ i & i \end{bmatrix} \quad x_2 = (1, 1) \quad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

№ 62.13

№ 62.14

№ 62.15

№ 62.16

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$\lambda = 0: f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda = 1: f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda = -1: f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$x_e = P_{ef} x_f \quad x_f = P_{ef}^{-1} x_e$$

$$P_{ef} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_{ef}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_{ef}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_f = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ -x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$(x, y) = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + (-x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (-x_3)(y_3)$$

№ 62.17

№ 62.18

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$(Ax, y) = A^H A = A A^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

№ 62.19

$$H^* H = H H^* \Rightarrow k \times m \Rightarrow m \times n = k \Rightarrow H - \text{matrix } n \times n.$$

$$[h_1, \dots, h_n] \text{ v.p.}$$

№ 62.20

$$A \text{ is unitary. Hermitian} \Leftrightarrow \forall x \in V \quad |Ax| = |A^* x|, \quad |Ax| - |A^* x| = 0$$

$$(\Rightarrow) \quad AA^* = A^* A, \quad (Ax, Ax) = (x, A^* Ax) = (x, AA^* x) = (A^* x, A^* x)$$

$$|Ax| = \sqrt{(Ax, Ax)}$$

$$|A^* x| = \sqrt{(A^* x, A^* x)} \Rightarrow \text{z.v.}$$

$$(\Leftarrow) \quad A^* (Ax) = A^* A x \quad |A(x+y)| = |A^*(x+y)|; \quad |A(x-iy)| = |A^*(x-iy)|$$

$$(AA^* x, y) = (x, A^* A y) = (Ax, Ay)$$

$$(x, A^* A x) = (x, A A^* x) \quad \forall x \in V$$

$$(A^* A x, y) = (x, A A^* y) = (A^* x, A^* y)$$

$$(x+y, A^* A x) = (A^* A x, x+y) \Rightarrow$$

$$A^*A(vy) = A^*A(x+iy) \quad \forall x \in V, \forall y \in V. \quad z \cdot y.$$

Σ 62.21

R норм. $\Leftrightarrow u_1 \perp u_2$
 ор. u_1 ор. u_2

($\Leftarrow$) $\lambda_1 = 1$: $u_1 \rightarrow u_1$ ор. u_1
 $\lambda_2 = -1$: $u_2 \rightarrow -u_2$ ор. u_2
 ор. норм.

2) $\exists$ ор. базис ор. ор. u_1, u_2
 ор. базис

($\Rightarrow$) Норм. $\Rightarrow \exists$ ор. базис $\Rightarrow \lambda_1 = 1$
 $\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow$ ор. базис
 $\Rightarrow u_1 \perp u_2$

Σ 62.27

$$A^*A = AA^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ \lambda-1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ \lambda-1 & 2+2\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)((-\lambda)(-\lambda) - 2) + (-\lambda-1)(\lambda-1) \cdot (-\lambda)$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 4 + (-1-\lambda)(-\lambda^2 + \lambda + 4 + \lambda^2) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 - \lambda^2 + \lambda + 4 + \lambda^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 8$$

$$= (-\lambda)(\lambda^2 - i^2 9) = (-\lambda)(\lambda - 3i)(\lambda + 3i)$$

$\lambda_1 = 0$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $f_1 = (2, 1, -2) \Rightarrow e_1 = \frac{1}{3} f_1$

$\lambda_2 = 3i$ $f_2 = (4-5i, 2+6i, 5) \Rightarrow e_2 = \frac{1}{3\sqrt{10}} f_2$

$\lambda_3 = -3i$ $f_3 = (4+5i, 2-6i, 5) \Rightarrow e_3 = \frac{1}{3\sqrt{10}} f_3$

Σ 62.32

U ; A - норм. и $A^k = 0$, $A^{k-1} \neq 0$.

$$A^*A = AA^*$$

$\Rightarrow \exists$ ор. базис где $A_{ii} = -e_i$
 $\lambda = 0 \Rightarrow$ ор. базис

~~норм. базис $\Leftrightarrow A = Q^{-1} \Lambda Q$, $Q^* = Q^{-1}$~~

5) $\Rightarrow A^k = Q^{-1} \Lambda^k Q = 0 \Rightarrow A = 0$

~~$(Ax, y) = (x, A^*y)$; $(A^k x, y) = 0 = (x, A^{*k} y) \quad \forall x, y$~~

$\Rightarrow A^{*k} = 0 \quad \forall k$

$$A^k = 0 \Rightarrow \underbrace{AA^*A}_{\neq 0} \neq 0 \Rightarrow A$$

Базис Уильямс.

а) адж. A орб. $x \Rightarrow \text{т.о. } A^*$

$\exists k=0 \Rightarrow \exists \text{ инв. н.г.-ка } \text{п.г.-м } n-1$

§ 62.55

$$A(t) = f(t+a) ; \quad A \in L \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = c_1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\frac{d}{dt} c_1 = 0$
 $\frac{d}{dt} c_2 = 0$

$(Ax, y) = (x, A^*y) ; \quad AA^* = A^*A$
Корр. $\Leftrightarrow \exists$ экв. базис $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{если } a=0 \Rightarrow \text{Дер} \\ \text{если } a \neq 0 \Rightarrow \text{Кл.} \end{cases}$

§ 62.56

V-инв. н.г.-б.

§ 62.53

$\text{im } A \perp \text{im } B ; \quad A+B - \text{Кор?}$
 $\text{Ker } A^* = \text{im } A^\perp - \text{н.г.-Корр.};$
 $\text{Ker } B = \text{im } B^\perp ; \quad \text{Ker } A = \text{im } A^\perp$

$$(A+B)(A^*+B^*) \stackrel{?}{=} (A^*+B^*)(A+B);$$

$$AB^*+BA^* \stackrel{?}{=} A^*B+B^*A$$

$$UU^* = U^*U = I \Rightarrow U^* = U^{-1}$$

Кр. ; $(Ux, Uy) = (x, y) ; \quad |Ux| = |x| ; \quad \text{Корр. инв. генер. б.}$
 $\Rightarrow$ все инв. экв. экв. экв.
но (!) п.г.-м !.

§ 63.4

$$\alpha U_1 = U_2 \Leftrightarrow |\alpha| = 1 ; \quad U_2 U_2^* = \alpha U_1 (\cancel{U_1^*}) U_1^* = \alpha I = |\alpha| I \Rightarrow |\alpha| = 1$$

§ 63.6(a, b)

a) $U^* = U^{-1}$, $U^*U = I$ $\delta) Ax = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$; $A^*x = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow AA^* = A^*A = I$
§ 6.14.6 $\Rightarrow AA^* = A^*A = I$

a) $Ac_1 = e_1 + ie_2$, $Ac_2 = ie_1$;

$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $A^* = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$

$\delta) A = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{i}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ -i & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AA^* = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

§ 6.17

a) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^H = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{1n} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^H A = \begin{bmatrix} (a_{11}, a_{11}) & (a_{11}, a_{12}) & \dots \\ (a_{21}, a_{11}) & (a_{21}, a_{12}) & \dots \end{bmatrix}$

§ 6.2.2

$(Ax_1, Ax_2) = (A^*Ax_1, x_2) = 0$
 $(x_1, x_2) = 0$ $\alpha \cdot I$

$A^*A = \alpha \cdot I$
 $A^* = \alpha A^{-1}$

$(x, y) = 0 \Rightarrow (Ax, Ay) = 0$ $\Rightarrow A \in U$; $U^*U = U^*U^* = I$
 $(A^*Ax, y) = (Dx, y) = 0$

$(e_1, e_2) = 0$, $|e_1| = |e_2| = 1$ $(Ac_1, Ac_2) = 0$; $(e_1 + e_2, e_1 - e_2) = 0$

$(A(e_1 + e_2), A(e_1 - e_2)) =$
 $= (Ac_1, Ac_1) - (Ac_1, Ac_2) + (Ac_2, Ac_1) - (Ac_2, Ac_2) = 0$

$\Rightarrow (Ac_1, Ac_1) = (Ac_2, Ac_2)$

$\Rightarrow |Ac_1| = |Ac_2|$

а) Попробуем отраз. базис $\Rightarrow$ нежелательно в отраз. базис с нулевыми элементами

$$e_i \rightarrow \alpha g_i$$

$e_1, \dots, e_n$ - ортон.

$\alpha_{11} \rightarrow g_1$ - базисный вектор

$$e_n \rightarrow \alpha g_n$$

$$Ax = A \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n x_i \alpha g_i \Rightarrow (Ax, Ax) = (\sum x_i \alpha g_i, \sum x_i \alpha g_i) \\ = \alpha^2 (\sum x_i g_i, \sum x_i g_i) \\ = \alpha^2 (x, x) \Rightarrow \alpha^2 = 1$$

Заг. 38.5

$$\text{б) } \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-5\lambda & 4 \\ 4 & -3-5\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda = \pm 1 \quad |\lambda| = 1 \Rightarrow \text{матр. ортогональна}$$

$$\lambda = 1: \Rightarrow x_1(2, 1)$$

$$\lambda = -1: x_2 = (1, -2)$$

$(x_1, x_2) \Rightarrow$ базис отраз. ортогональн.
 $u_1 = \alpha(x_1)$

След.

$$Q Q^* = Q^* Q = I; V = M_2; f_1 = 1 + t + t^2, g_1 = -1 - t + t^2$$

$$A f_1 = g_1, A f_2 = g_2 \\ f_2 = 1 - t^2, g_2 = 1 - t \\ f_3 =$$

$$|Q| = 1$$

Найти две матрицы b и c в базисе $1, t, t^2$.

$$(f_3, f_1) = 0, (f_3, f_2) \neq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad f_3 = 1 - 2t + t^2$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$(Q f_1, Q f_2) = 0 \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(Q f_2, Q f_3) = 0$$

$$g_3 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \Rightarrow b_1 = c, b_2 = 4 + 2c \Rightarrow Q f_3 = c + c t + 2c t^2$$

$$|f_3| = \sqrt{6} \Rightarrow |Q f_3| = \sqrt{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 + c^2 + 4c^2 = 6$$

$$\Rightarrow c^2 = 1$$

$$c = \pm 1$$

$$\text{Пусть } c = 1 \Rightarrow Q f_3 = 1 + t + 2t^2$$

$$Q = B F^{-1}$$

Σ 635

e_1 - βάση V ; $Ac_1 = \lambda e_1 \Rightarrow \lambda = 1$; AA^-

$$|\lambda e_1| = 1$$

$\Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow$ Ορίζεται γινόμενο και νόρμα α, β

Σ 636(b)

$Af(t) = f(-t)$, $A^2 = I$; Ορίζεται γινόμενο $\Leftrightarrow (Af, Ag) = (f, g) \forall f, g$

και $\|Af\| = \|f\|$, $\forall f \in V_n$

$\Rightarrow$ ισομετρία.

Σ 638

P κανονική $\Leftrightarrow U_1 \perp U_2$;

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow \text{γινόμενο και νόρμα, είναι το ίδιο} \Rightarrow \text{ορθογώνια}$$

P γιν. Συμφ. και $\|Px\| = \|x\|$, $\forall x \in V$, πο έσο και πο $\Rightarrow$ Ταυτόσημο, και I .

Σ 63.14(δ, ε)

$$\delta) A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad AA^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq I \Rightarrow \text{κεί}$$

$$\epsilon) A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{\sqrt{5}} \\ 1+2i & \frac{-2(1+2i)}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad A^* = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1-2i \\ \frac{5}{\sqrt{5}} & \frac{-2(1+2i)}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad AA^* = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 9 & -8i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I \Rightarrow \text{κεί}$$

Σ 63.39

$$(A - \lambda I)^{-1} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \frac{(-1-\lambda)}{(-1-\lambda)} \frac{1}{(-1-\lambda)}$$

Παρατηρούμε, ότι A - τελεστής γραμμών ερμηνεύεται $\sim \lambda_1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$

$$\lambda = -1: \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f_1 = (1, 1, 1), \text{ ημίσφ. } \dim U_1 = 2$$

$$\lambda = 1: \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} f_2 = (1, 1, 0) \\ f_3 = (1, 0, 1) \end{matrix} \text{ ημίσφ. } \dim U_2 = 2$$

$\Rightarrow$ Ομορ. κλάση

Плоскости ортоторм. Вектор из собственного вектора!

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_3 - x_1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_2 + x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 - x_2 \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow (x, y) &= (x_2 + x_3 - x_1)(y_2 + y_3 - y_1) + (x_1 - x_3)(y_1 - y_3) + \\ &+ (x_1 - x_2)(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Самосопряжённые операторы и матрицы

Результаты в ун-те. 4-е замечание, в еванг.-символ.

64.6

$$X = X_1 \oplus X_2, X_1 \in \mathcal{L}_1, X_2 \in \mathcal{L}_2$$

$$p_X = x_1; \quad P \leq P^* \Leftrightarrow h_1 \perp h_2;$$

Оператор μ (или μ_1, μ_2)

Тогда по числ. 289.

S69.13

6.13
 $AA^* = A^*A = I, A^* = A \Rightarrow AA = I \rightarrow$ ортogonal. op., um $\pm I$.
 (one more parameter)

Δ69.17

Фаза может быть не энтальпий. (критическое λ) $\Rightarrow$ Нет

SG4. 78108

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2i \\ 2i & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4i^2 = \lambda^2 - 5\lambda = (\lambda)(\lambda-5)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ z_i & y \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow g_1 = \left(\frac{z_i}{y}, -\frac{1}{y} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} -4 & -2i \\ 2i & -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow g_2\left(\frac{1}{11}, \frac{2i}{11}\right)$$

169.22

$$H = H^*, \quad \forall x \in V \quad (Hx, x) = 0$$

Ebenwohl, zu $\Rightarrow$ ~~+~~ $\frac{+}{-}$ $\frac{-}{+}$
Signe.
 $(\text{He}, e) = 0$

$$\lambda_1(e_1, e_1, 1-2) = 1, \lambda_1 = 0$$

→ Kyn. and
parap.

§ 64.23

$$A^* = -A, \text{ тогда } (Ax, x) = 0 \quad \forall x \in V.$$

$$(Ax, x) = (x, A^*x) = -(x, Ax) \stackrel{\text{свойств.}}{=} -(Ax, x) \Rightarrow (Ax, x) = 0.$$

§ 64.24

$$f_1(t) = 2t + 2t - t^2, f_2(t) = 2 - t + 2t^2$$

M_2 ;

$$Af_1(t) = 5 - t - t^2, Af_2(t) = 3 + 3t + 3t^2$$

Искомые выражения в базисе $\{t, t^2\}$;

$$A = 3; f_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2;$$

$$\begin{cases} (f_1, f_3) = 0 \\ (f_2, f_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow f_3 = \cancel{(-1+2t)} - 1 + 2t + 2t^2$$

$$(Af_3, f_1) = (f_3, A^* f_1) = (f_3, Af_1);$$

$$(Af_3, f_1) = -9.$$

$$(Af_3, f_2) = (f_3, Af_2) = 9$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & | & -9 \\ 2 & -1 & 2 & | & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & | & -9 \\ 0 & -3 & 3 & | & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & | & -9 \\ 0 & -1 & 1 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$Af_3 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2, b_2 = c \Rightarrow b_1 = c - 6, b_0 = \frac{3-c}{2}$$

$$Af_1 = a_{11} f_1 + a_{21} f_2 + a_{31} f_3 \quad | \cdot f_1$$

$$Af_2 = a_{12} f_1 + a_{22} f_2 + a_{32} f_3 \quad | \cdot f_2$$

$$Af_3 = a_{13} f_1 + a_{23} f_2 + a_{33} f_3 \quad | \cdot f_3$$

$$(Af_1, f_1) = a_{11} (f_1, f_1) \Rightarrow a_{11} = 1$$

$$(Af_2, f_2) = a_{22} (f_2, f_2) \Rightarrow a_{22} = 1$$

$$(Af_3, f_3) = a_{33} (f_3, f_3) \Rightarrow a_{33} = \det A - a_{11} - a_{22} = 1$$

$\Rightarrow c = 5;$

$$AF = G \Rightarrow A = GF^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 17 & 5 & -1 \\ 5 & -7 & 5 \\ -5 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

2.2

Задача 4
 $(A+A^*)^* = A^*+A = A+A^*$ где и в лев. и в прав.

$(AA^*)^* = A^*A$ где

$(A^*A)^* = A^*A$; 2) $(i(A-A^*))^* = -i(A^*-A) = i(A-A^*)$ где.

Задача 5

$(H_1H_2 + H_2H_1)^* = H_2^*H_1^* + H_1^*H_2^* = H_1H_2 + H_2H_1$ зг.

$(H_1H_2)^* = H_2^*H_1^* = H_2H_1 \Leftrightarrow H_1H_2 = H_2H_1$ зг.

Задача 7

Оператор. сопр. $\Leftrightarrow U_1 \perp U_2$

Норм. век. и в-е сопр. ^{или} ~~или~~ корни в-е

Задача 10

$A^* = -A$; $Ax = [x, a]$, где доказано по задаче.

Задача 13(б)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Задача 33

$H_1^* = H_1, H_2^* = H_2$; $Hx: (H_1x, x) = (H_2x, x)$ по $H_1 = H_2$

$(H_1x - H_2x, x) = 0 \quad \forall x \Leftrightarrow H_1x = H_2x$ зг.

Задача 34

$\forall x \in V (Hx, x) \in \mathbb{R} \Rightarrow H$ - эрмитов. Попробуй доказать

~~и все H_i H_{e_i} сопр. канон. e_i~~ ; $Hx = \lambda x \Rightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ зг.

Норм. оператор самосопр. $\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ зг.

$$\forall x \in V : (Hx, x) = \overline{(x, Hx)} = (x, Hx) = (x, H^*x) \Rightarrow (x, (H - H^*)x) = 0 \quad \forall x \in V$$

$$\Rightarrow Hx = H^*x, \forall x \in V \Rightarrow H = H^* \text{ з.г.}$$

Значения операторов

§65.1

$$y = Hx, x \neq 0$$

$$(Hx, x) > 0, (y, x) > 0$$

§65.2

Оператор не вырожденный, с.м. к.б. $A = 0$;

$$(Hx, x) > 0$$

§65.4

$$x = x_1 + x_2$$

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix}$$

$Bx = x$, опер. н.г.м. $\Leftrightarrow$ орт. проектор.
 $\forall \epsilon \in \mathbb{R} : (x, x) > 0$ з.г.
 канонич.

§65.15

Находим:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{33} & a_{35} \\ a_{53} & a_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = By$$

$$(By, y) = (Ax, x)$$

§65.22

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} n-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & n-2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n-3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_{n-3} > 0$ (как
 guess)
 λ_{n-2}

$$|A| = \tilde{I}_n = \tilde{I}_{n-2}; \Rightarrow \text{не еб-л} \text{ значимое.}$$

§65.44

$$A_F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta_f(A) = (4-k)(1-k)^2$$

$$A_e = Q_{f-1}^T A_f Q_{f-1}$$

$$B = A^{1/2}, B_f = Q_{f-2}^T A_e Q_{f-2}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e) \lambda_1 = \frac{1}{5} g_1 = \frac{1}{5} (1, 1, 1)$$

$$k=1$$

e-Sayme
 us asob
 blaxel

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y_2 = (0, 1, 0) \rightarrow c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0)$
 $y_1 = (1, 1, -2) \quad c_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2)$
 $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad Q_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$
 $B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Симметричные мат. операторы и матрицы

$A = H + K$ или $A = H_1 + iH_2$ - в унитар. пр-во
 где H, K - самосопр. H_1, H_2 - самосопр.

$A^* = H^* K^*, \quad A A^* = H H^* = H^2; \quad$ Если A - самосопр., то U - унитар.
 $A = H U$ унитар.

Зад. 2

$(Ax, x) = 0, \quad \forall x \in V$ унитар. пр-во. ; $A = H_1 + iH_2$;
 $(H_1 + iH_2)x, x = (H_1x, x) + i(H_2x, x) = 0 \Rightarrow A$ - унитар. (унитар. оператор)

Зад. 51

$DD^* = H^2, \quad D = HU$ - унитар.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow H = (DD^*)^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

$D = HU \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+1,1} & \dots & u_{n+1,n+1} \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n+1} \\ 2u_{21} & \dots & 2u_{2n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+1,1} & \dots & u_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad U U^* = I$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n+1,1} & \dots & u_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \ominus I \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

$$\textcircled{e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & u_{n+1,1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & u_{n+1,2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & u_{n+1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & u_{n+1,n} \\ u_{n+1,1} & u_{n+1,2} & u_{n+1,3} & \dots & u_{n+1,n} & \sum_{i=1}^n |u_{n+1,i}|^2 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1,1}|^2 = 1 \Rightarrow |u_{n+1,1}| = \pm 1$$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2/3

§65.3

$$H > 0 \text{ her. op. in } V; \forall x \in V \quad \frac{(Ax, x)}{\underbrace{|Ax|}_{>0} \cdot \underbrace{|x|}_{>0}} > 0 \quad \text{z.B.}$$

§65.8

$$(A^*Ax, x) \geq 0 \quad \forall x \in V; (Ax, Ax) \geq 0 \quad \text{z.B.}$$

$$(AA^*y, y) \geq 0 \quad \forall y \in V; (A^*y, A^*y) \geq 0 \quad \text{z.B.}$$

§65.10

$$AA^* > 0, A^*A > 0 \Leftrightarrow A \text{ invertierbar, i.e. } \ker A = \{0\}$$

$$(\Leftarrow) \rightarrow (Ax, Ax) \geq 0 \quad \forall x \in V, \ker A = \{0\} \rightarrow AA^* > 0; \quad \text{im } A^* = (\ker A)^\perp$$

AA^* her.;

$$\Leftrightarrow \forall x \in V \quad (A^*Ax, x) > 0, \text{ i.e. } (Ax, Ax) \geq 0 \Rightarrow Ax \neq 0 \Rightarrow \ker A = \{0\}$$

§65.12

$$\text{Her. op.} \quad H \Leftrightarrow \lambda_i \geq 0 \Rightarrow \text{für } \lambda_i = 0 \Rightarrow H = 0$$

§65.26

Op. her. c. sym. op. her. > 0

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x^T A x > 0; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n \end{bmatrix};$$

$$x^T A x = \bar{x}_1(x_1 + x_2) + \bar{x}_2(x_1 + 2x_2 + x_3) + \bar{x}_3(x_2 + 2x_3 + x_4) + \dots + \bar{x}_n(x_{n-1} + x_n);$$

$$\bar{x}_1 x_1 + 2\bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_2 x_1 + 2\bar{x}_2 x_2 = (a_1 + a_2)^2 + b_1^2 + b_2^2 +$$

$$x_1 = a_1 + ib_1, \quad x_2 = a_2 + ib_2$$

$$\frac{b_1^2 + b_2^2}{2 + a_2^2}$$

$\Rightarrow$ her. op. her. c. sym. op. her.

$$\lambda=5: |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = (5-\lambda-3)(5-\lambda+3) = (2-\lambda)(8-\lambda)$$

$\lambda > 0 \Rightarrow$ Canonical property theorem, any.

$$A = Q_{\text{eaf}}^{-1} A_e Q_{\text{eaf}} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = 2: \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1) \\ \lambda = 8: \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1) \end{array} \right.$$

$$B_f = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow B_e = Q_{\text{eaf}} B_f Q_{\text{eaf}}^{-1}; \quad Q_{\text{eaf}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q_{\text{eaf}}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ex. 46

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(-\lambda)^3; \quad \lambda=4: \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{2} (1, 1, 1, 1)$$

$\lambda=0:$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0, 0) \\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1, 0) \\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 0, 1) \end{array}$$

$$Q_{\text{eaf}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_{\text{eaf}}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e = Q_{\text{eaf}} B_f Q_{\text{eaf}}^{-1}$$

$$B_e = Q_{\text{eaf}} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ex. 3

$$a) ((A+B)x, x) = 0 \quad \forall x \in V \Rightarrow A = -B$$

$$b) (Ax, x) = (x, Ax) \quad \forall x \in V; (x, Ax) = (x, Bx) \quad \forall x \in V \Rightarrow B = A$$

§6.6

$$H \text{ и } S \text{ - сопр.}; (Hx, Sx) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow H \text{ и } S \text{ сопр.}$$

$$(Hx, Sx) = \overline{(Hx, Sx)} = (Sx, Hx)$$

$$(x, HSx) = (x, SHx) \quad \forall x \in V, \text{ т.е. } HS = SH$$

§6.5

$$A > 0 \Rightarrow A = U \Lambda U^T; A = HU; AA^* = H^2 \Rightarrow H = (AA^*)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 26 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 26 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 350 \\ 350 & 725 \end{bmatrix} = H^2 = T;$$

$$|T - \lambda I| = \begin{vmatrix} 200 - \lambda & 350 \\ 350 & 725 - \lambda \end{vmatrix} = (200 - \lambda)(725 - \lambda) - 350^2 = \lambda^2 + \lambda(-200 - 725) + 200 \cdot 725 - 350^2$$

$$= \lambda^2 - 925\lambda + 22500 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{925 \pm 875}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 900, \lambda_2 = 25.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 200 - 900 & 350 \\ 350 & 725 - 900 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -700 & 350 \\ 350 & -175 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 350 & -175 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{55} (1, 2)$$

$$\begin{bmatrix} 200 - 25 & 350 \\ 350 & 725 - 25 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 175 & 350 \\ 350 & 700 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 175 & 350 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{55} (2, -1)$$

$$\Rightarrow Q_{e \rightarrow f} = \frac{1}{55} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H = \frac{1}{55} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{55} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{55} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 60 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$$

$$U = A^{-1}A; \begin{bmatrix} 10 & 10 & | & 14 & -2 \\ 10 & 25 & | & 26 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 10 & 10 & | & 14 & -2 \\ 0 & 15 & | & 12 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & \frac{14}{10} & -\frac{2}{10} \\ 0 & 1 & | & \frac{12}{15} & \frac{9}{15} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{9}{15} & -\frac{9}{15} \\ 0 & 1 & | & \frac{12}{15} & \frac{9}{15} \end{bmatrix} \Rightarrow U = \frac{1}{55} \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$$

§6.59

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix}; AA^* = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 27 & 45 \\ 27 & 27 & 45 \\ 45 & 45 & 99 \end{bmatrix} =$$

$$|T - \lambda I| = \begin{vmatrix} 27-\lambda & 27 & 45 \\ 27 & 27-\lambda & 45 \\ 45 & 45 & 99-\lambda \end{vmatrix} = (99-\lambda) \begin{vmatrix} 27-\lambda & 27 & 45 \\ 27 & 27-\lambda & 45 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (99-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 18 \\ 0 & -\lambda & 18 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(99-\lambda)(-\lambda(-\lambda-18)+18) = (99-\lambda)(-\lambda)(-36-\lambda) \quad \lambda = 0, 9, 144$$

$$\lambda = 0: \begin{bmatrix} 27 & 27 & 45 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$$

$$\lambda = 9: \begin{bmatrix} -72 & 27 & 45 \\ 27 & -72 & 45 \\ 45 & 45 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -72 & 27 & 45 \\ 0 & -99 & 0 \\ 45 & 45 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1)$$

$$\lambda = 144: e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2); \quad Q_{e_3} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \quad Q_{e_3}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H = Q_{e_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} Q_{e_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = HU; \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3(u_{11} + u_{21} + u_{31}) = 1 \\ 3(u_{12} + u_{22} + u_{32}) = 5 \\ 3(u_{13} + u_{23} + u_{33}) = 1 \\ 3(u_{11} + u_{21}) + 9u_{31} = 3 \\ 3(u_{12} + u_{22}) + 9u_{32} = 9 \\ 3(u_{13} + u_{23}) + 9u_{33} = -1 \end{cases}$$

$$U^* = \begin{bmatrix} u_{21} & 1-u_{22} & 1-u_{23} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u_{21}^* & u_{21}^* & \frac{1}{3} \\ 1-u_{22}^* & u_{22}^* & \frac{2}{3} \\ 1-u_{23}^* & u_{23}^* & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int u_{21}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ 3 - 9u_{31} + 3u_{33} &= 1, \\ 2 &= 6u_{31} \Rightarrow u_{31} = \frac{1}{3} \\ 9 - 9u_{32} + 3u_{33} &= 5 \\ 6u_{32} &= 4 \Rightarrow u_{32} = \frac{2}{3} \\ -3 - 9u_{33} + 3u_{33} &= 1 \\ 6u_{33} &= -4 \Rightarrow u_{33} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_{11} = 1 - 3u_{31} - u_{21} \\ u_{12} = 3 - 3u_{32} - u_{22} \\ u_{13} = 1 - 3u_{33} - u_{23} \end{cases}$$

Задача 2.4(2)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 +$$

Задача 2.7

$$2) x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 = x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot \frac{x_2}{2} + \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_2^2}{4} - x_2^2 = (x_1 - \frac{x_2}{2})^2 - \frac{5}{4}x_2^2$$

$$7) x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 - 6x_2x_3 = (x_1 + (x_2 + x_3))^2 - 4x_2^2 - 5x_3^2 - 8x_2x_3 = (x_1 + (x_2 + x_3))^2 - 4(x_2 + x_3)^2 - x_3^2 + 4x_3^2 - 5x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4(x_2 + x_3)^2 - x_3^2.$$

Задача 2.11

$$1) 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

Г.к. матрица симм. $\Rightarrow \exists$ базис из ортонорм. векторов.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(30 - 11\lambda + \lambda^2 - 4) + 4(\lambda - 5) =$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 26) + 4(\lambda - 5) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 29\lambda + 77\lambda - 162 = (\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 1)$$

$$\lambda = 3: \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{3}(2; 2; -1)$$

$$\lambda = 6:$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{3}(-1; 2; 2)$$

$$\lambda = 1:$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow e_3 = \frac{1}{3}(2; -1; 2)$$

$$x = Qy$$

ортонорм. матрица; $Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ новая норма: $3y_1^2 + 9y_2^2 + 6y_3^2$

$$A(x, x) = (Hx, x) = (HQy, Qy) = (Q^*HQy, y) = (Q^T H Q y, y) = (\Lambda y, y)$$

Q^{-1} орт. матрица.

H - по A .

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e = (1, 2, -1).$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

Ex. 30

$$A z = u, \quad \|A z - u\|_2 \xrightarrow{\min} ; \quad A^* A z^+ = A^* u$$

$$A z^+ = \text{pr}_{\text{im} A} u$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad A^* A = [3]^{4 \times 4}; \quad A^* u = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3;$$

$$z^+ = (3 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)^T$$

$$\text{im} A: e = (1, 1, 1, 1); \quad u = \alpha e + h, \quad \alpha = \frac{(u, e)}{(e, e)} = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{pr}_{\text{im} A} u = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$z^+ = z_0^+ + t, \quad \text{pr}_{\text{ker} A} z_0^+; \quad \text{Ker} A: f = (1, 1, 1, 1)$$

$$(z^+, f) = 2(f, f), \quad 3 = \alpha \cdot 4, \quad \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow z_0^+ = \frac{3}{4} f.$$

